TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. E. BLOM, C. O. G. BORELIUS,
OTTO GALLANDER †, J. S. HEDSTRÖM,
HJALMAR OLSON, G. STARCK

TIONDE ÅRGÅNGEN

1926—1927

STOCKHOLM
ALBERT BONNIERS FÖRLAG

STOCKHOLM
ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1927

Tionde årgångens innehåll.

Sid.

BLIX, KARL. Några anm. till frågan om läroboksplagiat 245
BÄCKSTRÖM, HELMER. Några historiska data rörande vridspolsgalvanometern 142
BLOM, C. E. Angående enhetliga beteckningar i matematik och fysik 235
EDQVIST, TORGNY. Notis om kvicksilverlikriktare 244
FRENDEL, ANTON. Ett likriktaraggregat med glimljuslampan som likriktare 39
— — Om ljusets brytning i en plan vattenyta 154, 205
FOGHAMMAR, ERNST. Apparat för demonstration av de s. k. tum- och lillfingerreglerna 223
GALLANDER, OTTO. Om undervisningen i elektrostatik 90
— — (O. G—R.) Anm. till C. A. Schultz Steinheils uppsats Om tonskalor 44
— — Anm. av Uppfinningarnas bok II 51
HAGSTRÖM, K. L. Om isoperimetriska produkters maxima 1
H—M. Otto Gallander † 65
— — Linjalritningen i klass 4 168
— — Astronomiundervisningen i ring I 169
HERMANSSON, SIGFRID. Om räkning med närmevärden i realskolans matematikkurs 195
KINNMAN, CARL. Om tals delbarhet med 7, 11 eller 13 7
LEMOINE, MAGNUS. Om likriktare. Ett inlägg 166
— — Anm. av *Moll-Rudberg*, Magnetism och elektricitet 174
LEVIN, C. A. Spegling mot rörlig planspegel 220
LUNDBERG, JOHN. Deutsches Museum i München 96
LÖWENHAMN, ERIK. Några försök till läran om växelströmmar och elektriska svängningar 212
MATTSON, RUBEN. Lagtext och funktionslära 10
NORÉN, ELOF. Om vinkelns tredelning och kubens fördubbling 68
— — En enkel trigonometrisk formel 140
NYSTRÖM, BENGT E. Anm. av *Larson*, Lärobok i plan geometri för gymnasiet 173
— — Svar å anm. av Karl Blix härtill 246
OLSON, HJALMAR. Om geometriundervisningen, mål och metod. I 12
— — » » » » » II ... 72
— — (Hj. O.) Anm. av *Lindblad*, Lärobok i matematik 48
— — Anm. av *Wigforss*, Den grundläggande matematikundervisningen 49
— — Anm. av *Smith*, History of Mathematics 113

Sid.
OLSON, HJALMAR. Anm. av *Wällstedt*, Lärobok och exempelsamling samt *Asperén-Damm*, Lärobok i räkning 171
PETRINI, HENRIK. Geometri utan vinklar 129
— — Förenklad framställning av läran om hörn 193
RAMSTEDT, EVA. Radioaktivitet och modern atomlära på gymnasiet ... 101
— — Anm. av *Klein*, Vad vi veta om ljuset, *Haas*, Naturen enligt den moderna fysiken, *Beckman*, Synligt och osynligt ljus 115
SCHULTZ-STEINHEIL, C. A. Om tonskalor 43
STARCK, G. En enkel apparat för att påvisa kolsyra 46
— — (G. S.) Anm. av *Löfman och Pehrson*, Kemiska räkneuppgifter 54
— — Anm. av *Ramberg*, Syra, bas och salt 55
— — Anm. av *Christiansen-Karlsson*, Sveriges järnhantering 183
— — Om Avogadros princip och dess införande på skolstadiet 225
STENQUIST, DAVID. Om de elektriska jordströmmarna 24

Problemavdelning (red. av S. BÅGMAN) 58, 119, 185, 248
Till redaktionen insända böcker 57, 118, 184, 247

Om isoperimetriska produkters maxima.

Av K. L. HAGSTRÖM.

En produkt av positiva variabla faktorer säges vara isoperimetrisk, om faktorernas summa är konstant. Sålunda är produkten xy isoperimetrisk, om $x+y=k$, xyz isoperimetrisk, om $x+y+z=k$, o. s. v.

Produkten säges vara tvåledig, treledig o. s. v., alltefter-som den innehåller 2, 3 eller flera faktorer.

Av själva beteckningen framgår, att produkterna $x(2-x)$, $2x(2-x)^2$ äro isoperimetriska. I den förra är faktorernas summa $=2$, och i den senare, som kan skrivas $2x(2-x)(2-x)$, alltså en treledig produkt, är faktorernas summa $=4$.

Satsen om isoperimetriska produkters maxima lyder sålunda:

En isoperimetrisk produkt har sitt största värde, då alla dess faktorer äro lika stora.

För en tvåledig produkt är beviset lätt utfört:

Medelproportionalen mellan två positiva storheter är mindre eller på sin höjd lika med storheternas aritmetiska medium:

$$\sqrt{xy} \leqq \frac{x+y}{2},$$

där likhetstecknet gäller endast för det fall, att $x=y$. Likheten är ju i så fall identisk.

$$\therefore\ xy \leqq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Är nu produkten isoperimetrisk, d. v. s. $x+y=k=$ en konstant, blir $xy \leqq \left(\frac{k}{2}\right)^2$, d. v. s. $\left(\frac{k}{2}\right)^2$ är produktens största värde, vilket erhålles, då $x=y=\frac{k}{2}$.

Den geometriska tolkningen av satsen är följande: Om xy är en rektangel, så är $x+y=$ rektangelns halva omkrets, och vår sats utsäger då, att bland alla rektanglar med given omkrets (perimeter) har kvadraten den största ytan.

Här se vi ursprunget till ordet isoperimetrisk = med lika omkrets, en benämning, som överflyttats från rektangeln, den tvålediga produkten, till mångalediga produkter.

*

Satsen kan utsträckas att gälla mångalediga produkter med vilket antal faktorer som helst. Vi börja med en produkt av 4 faktorer.

Enligt det föregående är

$$xy \leqq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

$$zu \leqq \left(\frac{z+u}{2}\right)^2.$$

Genom multiplikation fås, att

$$xyzu \leqq \left(\frac{x+y}{2} \cdot \frac{z+u}{2}\right)^2$$

och likhetstecknet gäller för det fall, att $x=y$ och $z=u$.

Högra sidan kan nu transformeras:

$$\frac{x+y}{2} \cdot \frac{z+u}{2} \leqq \left(\frac{x+y+z+u}{4}\right)^2.$$

$$\therefore \quad xyzu \leqq \left(\frac{x+y+z+u}{4}\right)^4,$$

där likhetstecknet förutsätter, att $\frac{x+y}{2} = \frac{z+u}{2}$, som tillsammans med föregående villkor $x=y$ och $z=u$ ger oss, att alla fyra faktorerna äro lika stora, $x=y=z=u$.

Om nu produkten är isoperimetrisk, d. v. s. $x+y+z+u= k$, fås produktens max.-värde $= \left(\frac{k}{4}\right)^4$, då $x=y=z=u=\frac{k}{4}$.

*

För en treledig produkt blir beviset följande:

Om vi i den fyrlediga produkten sätta $x+y+z=3u$, få vi

$$xyzu \leqq \left(\frac{3u+u}{4}\right)^4 = u^4,$$

varav

$$xyz \leqq u^3 = \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3.$$

Är produkten isoperimetrisk, d. v. s. $x+y+z=k$, så fås produktens max.-värde $\left(\frac{k}{3}\right)^3$ för $x=y=z=\frac{k}{3}$.

*

Beviset kan på likartat sätt utsträckas att gälla produkter med huru många faktorer som helst. För planimetrien och stereometrien ha vi emellertid endast behov av två- och trelediga produkter.

*

Vi skola nu visa satsens användning för lösning av några exempel. För att få den framställda produkten isoperimetrisk stöder man sig ofta på den självklara satsen, att om en produkt består av en variabel faktor och en konstant faktor, så har produkten sitt maximum på samma gång (d. v. s. för samma x-värde) som den variabla faktorn. Man kan följaktligen från produkten avskilja eller till produkten tillfoga en konstant faktor.

Ofta behöver man höja produkten i kvadrat för att få den isoperimetrisk. Den ursprungliga (positiva) produkten och dess kvadrat ha sina max. för samma värde på den oberoende variabeln.

Ex. 1. *Sök ytan av den största rektangel, som kan inskrivas i en liksidig triangel med sidan* $= 2a$.

Sätt rektangelns bas $= 2x$ och höjd $= y$. Alltså $2xy = \text{max.}$ eller $xy = \text{max.}$

Att rekt. är inskriven uttryckes genom ekv. $y = (a - x)\sqrt{3}$.

Elimineras y och avskiljes den konstanta faktorn $\sqrt{3}$, erhålles den isoperimetriska produkten $x(a-x)$, som har sitt max. för $x=a-x$, eller $2x=a$ och $y=\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

Svaret: Max.-ytan $=2xy=\frac{a^2}{2}\cdot\sqrt{3}=$ halva den givna triangeln.

Ex. 2. *Vilken av alla trianglar med omkretsen* $=2p$ *har den största ytan?*

Sätta vi sidorna x, y, z, så få vi

$$\sqrt{p\cdot(p-x)(p-y)(p-z)}=\text{max.},$$

eller, om vi höja i kvadrat och frånskilja den konstanta faktorn p,

$$(p-x)(p-y)(p-z)=\text{max.}$$

Produkten är en treledig, isoperimetrisk produkt med faktorernas summa $=p$ och har alltså sitt max. $=\left(\frac{p}{3}\right)^3$ för $p-x=p-y=p-z=\frac{p}{3}$ eller $x=y=z=\frac{2p}{3}$.

Svaret: Den liksidiga triangeln.

Ex. 3. *En rät kon är inskriven i ett givet klot* (*radie* $=r$). *Huru stor del av klotet utgör konen, då dess volym är max.?*

Låt konens basradie vara $=x$ och dess höjd y.

Vi få då ekvationerna $\frac{\pi x^2 y}{3}=$ max. eller $x^2y=$ max. samt $x^2=y(2r-y)$.

Efter elimination av x^2 erhålles $y^2(2r-y)=$ max. Efter tillsättande av 2 faktorer, vardera $=\frac{1}{2}$, erhålles den isoperimetriska produkten $\frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot(2r-y)$, som har sitt max., då $\frac{y}{2}=2r-y$.

$$\therefore\ y=\frac{4r}{3}\ \text{och}\ x^2=\frac{8r^2}{9}.$$

Svaret: Max.-volymen $=\frac{\pi x^2 y}{3}=\frac{32\pi r^3}{81}=\frac{8}{27}$ av klotet.

Ex. 4. *Vilken form bör en cylinder med given yta hava för att få största möjliga volym?*

Låt radien vara x, höjden $= y$ samt ytan $= 2\pi a^2$.

Man får $\pi x^2 y = \text{max.}$ samt $2\pi x^2 + 2\pi x y = 2\pi a^2$, varav $y = \frac{a^2 - x^2}{x}$. $\therefore\ x(a^2 - x^2) = \text{max.}$

För att få produkten isoperimetrisk höja vi i kvadrat och tillsätta faktorn 2. $\therefore\ 2x^2(a^2 - x^2)(a^2 - x^2) = \text{max.}$ Härav $2x^2 = a^2 - x^2$, $\therefore\ x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ och $y = \frac{2a}{\sqrt{3}} = 2x$.

Svaret: Höjden bör vara lika med basdiametern.

Följande exempel visar satsens användning på lösning av minimiproblem.

Ex. 5. *Av alla räta koner, som kunna omskrivas kring en given cylinder, är den minst, vars höjd är 3 gånger cylinderns.*

Låt cylinderns basradie och höjd vara resp. a och h samt konens resp. x och y.

Man erhåller $\frac{y}{x} = \frac{h}{x - a}$ samt $\frac{\pi x^2 y}{3} = \text{min.}$ eller $x^2 y = \text{min.}$

Elimineras y, erhålles $\frac{hx^3}{x - a} = \text{min.}$ eller $\frac{x^3}{x - a} = \text{min.}$,

eller, om vi invertera,

$$\frac{x - a}{x^3} = \text{max.} \quad \therefore\ \frac{1}{x^2} \cdot \left(1 - \frac{a}{x}\right) = \text{max.}$$

För att få denna produkt isoperimetrisk tillsätta vi två faktorer, vardera $= \frac{a}{2}$:

$$\therefore\ \frac{a}{2x} \cdot \frac{a}{2x} \cdot \left(1 - \frac{a}{x}\right) = \text{max.}$$

$$\therefore\ \frac{a}{2x} = \frac{1}{3} \text{ och } x = \frac{3a}{2},$$

varav $$y = \frac{hx}{x-a} = 3h,$$

som bevisar påståendet.

*

För erhållande av ytterligare exempel hänvisa vi till Thams Planimetri samt Hagströms lärobok i Stereometri. Utförligare behandling av de isoperimetriska produkternas maxima återfinnes i en uppsats av G. Dillner i Tidskrift för Matematik och Fysik, årgång 1868.

Om tals delbarhet med 7, 11 eller 13.

Av CARL KINNMAN.

I följande uppsats förstår jag med ett helt tals S »n-siffriga deltal» de tal, som erhållas genom att från höger räknat och utan förändring av siffrornas inbördes ordning uppdela talet S i grupper om vardera n siffror. Dessa deltal betecknar jag med $D_{n,k}$, där k är deltalets ordningsnummer, likaledes från höger räknat.

Man får således

$$S = D_{n,1} + 10^n \cdot D_{n,2} + 10^{2n} \cdot D_{n,3} + \text{etc.}$$

eller, om m är antalet deltal,

$$S = \sum_{k=1}^{m}{}' 10^{n(k-1)} \cdot D_{n,k}.$$

Uppdelas S i deltal om sex siffror, $n = 6$, har man, att

$$S = \sum_{k=1}^{m}{}' 10^{6(k-1)} \cdot D_{6,k},$$

eller

$$S = \sum_{k=1}^{m}{}' [(10^{6(k-1)} - 1) \cdot D_{6,k} + D_{6,k}]$$

d. v. s.

$$S - \sum_{k=1}^{m}{}' D_{6,k} = \sum_{k=1}^{m}{}' (10^{6(k-1)} - 1) \cdot D_{6,k} \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Härav följer omedelbart, att varje tal S är kongruent med summan av dess 6-siffriga deltal med avseende på det tal, som högra ledet av (1) föreställer, och således även med avseende på samma tals alla faktorer. Emellertid äro tal av formen $10^{6(k-1)} - 1$, vilkas exponenter för 10 äro delbara med 6, på grund härav alltid delbara med $10^3 + 1 = 1001$. Men emedan $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, måste S och $\sum_{1}^{m}{}' D_{6,k}$

vara kongruenta med avseende på talen 7, 11 och 13, eller, med andra ord, man erhåller huvudsatsen:

Ett tal S är delbart med 7, 11 eller 13 i samma mån som summan s av dess 6-siffriga deltal är det.

Är därför s jämnt delbart med någon av dessa tal, måste detta även vara fallet med S, men om divisionen i s lämnar en rest > 0, måste divisionen i S lämna samma rest.

Det högsta antal siffror, som summan s behöver innehålla är 6, ty om det vid summeringen av deltalen erhållna talet innehölle mer än sex siffror, kan det tydligen behandlas efter samma regel, till dess man slutligen erhåller en (högst) 6-siffrig summa, vilken påtagligen även måste vara kongruent med S.

Ett 6-siffrigt tal kan enligt beteckningssättet skrivas:

$$s = D_{3,1} + 10^3 \cdot D_{3,2},$$

eller

$$s = D_{3,1} - D_{3,2} + (10 + 1) \cdot D_{3,2} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

i vilket uttryck tredje termen innehåller talet 1001 och på grund härav måste s och $(D_{3,1} - D_{3,2})$ vara kongruenta med avseende på siffrorna 7, 11 och 13. På grund härav erhålles hjälpsatsen:

Ett 6-siffrigt tal är delbart med 7, 11 eller 13 i samma mån som skillnaden emellan dess första och andra 3-siffriga deltal är det.

Såsom ett specialfall må framhållas, att om skillnaden emellan deltalen $= 0$, är s samtidigt delbart med 7, 11 och 13; vid 6-siffriga tal kan detta blott inträffa i de fall där båda deltalen äro identiskt lika. Sålunda äro alla tal av typen *abcabc*, t. ex. 436436 eller 56056 etc., delbara med 7, 11 och 13. (Det är ju också omedelbart framträdande, att dylika tal äro multipler av 1001.)

Såsom sammanfattning av det föregående kan man uppställa följande regel för att avgöra huruvida ett givet tal är jämnt delbart med 7, 11 eller 13:

Uppdela talet S i 6-siffriga deltal och summera dessa (event. genom upprepade operationer) till ett (högst) 6-siffrigt tal s:

om skillnaden emellan talets s första och andra 3-siffriga deltal är delbar med 7, 11 eller 13, är detta även fallet med talet S.

Det är utan vidare klart, att provet även kan verkställas efter följande regel:

Uppdela talet S i 3-siffriga deltal; summera alla deltal av udda ordningsnummer till en summa s_1 *och alla deltal av jämnt ordningsnummer till en summa* s_2. *Om skillnaden* $s_1 - s_2$ *är delbar med 7, 11 eller 13, är detta även fallet med talet S.*

Det torde böra beaktas, att om fråga är att undersöka ett givet större tals delbarhet, det är mycket förmånligt att bilda den 6-siffriga summan *s*. Det är nämligen klart, att detta tal även och bekvämare än det stora talet kan tjäna för undersökning av talets *S* delbarhet med 3 och 9, då det ju är bildat genom enkel summering av talets siffror. T. ex. om $S = 169'801632$, blir $s = 801632 + 169 = 801801$, vars tvärsumma är $= 18$; då *S* slutar på 2 och $D_{3,\,1} - D_{3,\,2} = 0$, är alltså *S* delbart med 3, 6, 7, 9, 11, 13 förutom med andra faktorer. Då detta exempel måhända kan synas väl »gjort», tager jag ett annat: $S = 35'896113'596783'612592$. Här blir *s* (efter två summeringar) $= 105'525$, vars tvärsumma $= 18$, och vars deltals diff. $= 420$, vilka resultat på ett bekvämare och därför tillförlitligare sätt än genom successiv summering av talets *S* siffror visar dess delbarhet med 3, 6 och 9 samt dessutom ådagalägger att det är multipel av 7 men icke av 11 eller 13.

*

I samband härmed skulle jag vilja framhålla, att den klassiska 8-regeln »om de tre sista siffrorna bilda ett tal, som är delbart med 8 etc.», som ända sedan jag i skolan inlärde reglerna för delbarheter synts mig opraktisk, kan ersättas med följande betydligt enklare regel: »Ett tal är jämnt delbart med 8, om detta är fallet med dess första 2-siffriga deltal, ökat eller minskat med 4 gånger 100-talssiffran.»

Lagtext och funktionslära.

Av **RUBEN MATTSON.**

För någon tid sedan skulle den, som skriver detta, taga reda på grunderna för dyrtidstillägg till pensionerade statstjänstemän och fann då i vederbörliga författning följande princip angiven för avlöningen i fråga:

»Dyrtidstillägget utgår i förhållande till ett för månad beräknat tilläggsunderlag, bestämt på följande sätt.

Uppgår den å månad belöpande pensionen till 150 kronor eller därutöver, utgöres tilläggsunderlaget av pensionens belopp, dock högst 400 kronor.

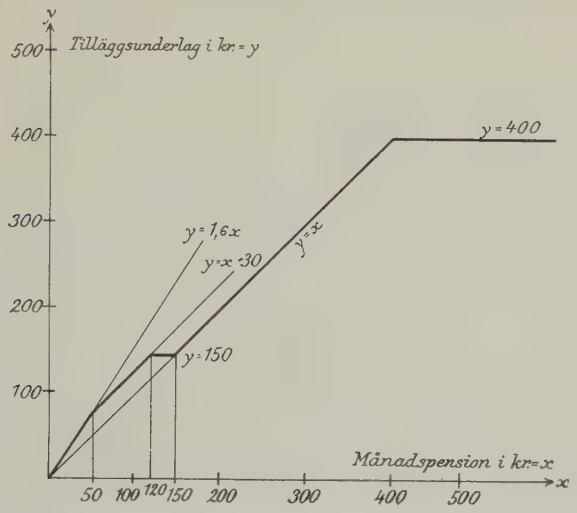
Understiger pensionen 150 kronor för månad, motsvarar tilläggsunderlaget summan av pensionen och ett belopp av 30 kronor, dock att tilläggsunderlaget i sådant fall ej må överstiga 150 kronor och ej heller 160 procent av pensionsbeloppet.»

För att komma underfund med, hur författaren till dessa bestämmelser, där beloppets ringhet garanteras t. o. m. genom dubbla begränsningar, tänkt sig underlagets beräkning, är det lämpligt för att icke säga nödvändigt att grafiskt åskådliggöra underlagets beroende av pensionen. Man kommer då till det å följande sida avbildade diagrammet, där den grovt dragna brutna linjen anger, hur tilläggsunderlaget varierar för olika månadspensioner och huru bestämmelserna alltså böra avfattas, om endast ett beräkningssätt skall behövas vid uträkning av det mot en given pension svarande underlaget.

Diagrammet visar, att för pensioner under 50 kr. i månaden utgör tilläggsunderlaget 160 % av pensionen, medan det för pensioner mellan 50 och 120 kr. är = pensionens månadsbelopp, ökat med 30 kr. För alla pensioner, vilkas månadsbelopp ligga mellan 120 kr. och 150 kr., är underlaget 150 kr. Är den månatliga pensionen större än 150 kr. men mindre än 400 kr., är underlaget = pensionen; överstiger pensionen 400 kr., är underlaget 400 kr.

Det är icke gärna möjligt, att författaren till den ovan

meddelade lagtexten varit förtrogen med funktionsbegreppet. Hade han varit det, hade nog föreskrifterna blivit tydligare och lättare att tillämpa. Möjligheten härav torde framgå av det föregående. Vid åsynen av det månghörniga diagrammet kan man nog också sätta i fråga, om icke någon förenkling i beräkningssättet varit möjlig. Men det är ju



tänkbart, att finansiella eller andra skäl framtvingat de bestämmelser, som ovan refererats.

Det här meddelade diagrammet är visst icke enastående i sitt slag. För den, som under kristiden haft att syssla med olika slag av avlöning, har det givits många exempel på, hur inkrånglade bestämmelser givit upphov till ojämnheter i diagrammen, som för lekmannen synts fullkomligt onödiga. Att vidare ingå på vad som i den vägen förekommit, är här icke platsen. Då det emellertid i en snar framtid gäller att bestämma kurser i matematik för olika gymnasielinjer, har det synts vara av värde att nu påpeka betydelsen av, att även blivande jurister i skolan vinna full förtrogenhet med ett av det viktigaste begrepp matematiken sysslar med, funktionsbegreppet.

Om geometriundervisningen, mål och metod.[1]

Av HJALMAR OLSON.

I. Inledning. Det förberedande stadiet.

Enligt gällande undervisningsplan tager den egentliga geometriundervisningen sin början i 3:e klassen och fortsätter sedan hela skolan igenom ända till studentexamen. I de metodiska anvisningarna anges helt kort målet för geometriundervisningen i realskolan vara att bibringa lärjungarna »— — — förtrogenhet med geometriens elementära begrepp och metoder till en omfattning, som motsvarar fordringarna på allmän medborgerlig bildning och på samma gång utgör en tillräcklig förberedelse till de fortbildningsanstalter, som ansluta sig till realskolan». Ang. gymnasiet anges ännu mer allmänt för undervisning i matematik (ej särskilt i geometri) målet vara att »till en omfattning, som motsvarar real- och latingymnasiernas allmänna bildningsmål, bibringa lärjungarna matematisk insikt och färdighet och på samma gång förtrogenhet med den art av tänkande, som är utmärkande för den matematiska vetenskapen». När här närmare skall skärskådas geometriundervisningens mål och uppgifter samt försök göras att ange den lärogång och de metoder, som på grund härav lämpligast böra komma till användning, skall endast den rent syntetiska geometrien upptagas till behandling. Detta särskilt därför, att undervisningen i syntetisk geometri erbjuder flera synnerligen intressanta, men svårlösta problemställningar av vetenskaplig och pedagogisk art, vilket icke är fallet med den analytiska geometrien.

[1] Efter föredrag, hållet för lärarekandidaterna i Stockholm höstterm. 1925.

Vad då först angår geometriens ställning i vår nu gällande skolordning jämförd med föregående skolorganisationer, veta vi, att skolreformen av år 1905 ur en viss synpunkt innebar en stark beskärning av ämnet. Medan före denna tid geometrien på realgymnasiet intog en central ställning, slutande i mogenhetsexamen med en särskild geometrisk skrivning, har den nu fått maka åt sig för modernare grenar inom matematiken. Man skall emellertid betänka, att det, som då krävde den myckna tiden och det ansträngande arbetet, var den geometriska problemlösningen, varvid man i allmänhet ställde stora fordringar icke minst på diskussionen beträffande möjlighetsvillkor och antal lösningar för olika fall. En dylik uppdriven förmåga att lösa geometriska problem kan ej ha stort praktiskt värde. Däremot torde den ej sakna värde ur formell synpunkt. Man vänjes att se en sak från flera sidor, att tränga till bottnen med en uppgift, och i arbetets produktiva natur måste ligga en viss tjusning, som eggar till att öka ansträngningarna för att komma till ett resultat. Det torde emellertid vara så, att för många lärjungar och det även ofta för sådana, som för övrigt ej voro obegåvade för matematik, hela detta arbete fick mycket av hasardmässighet och gissning över sig. Genom att avsevärt minska av på fordringarna i detta avseende torde den mindre tid, som numera står till buds för geometrien, enligt min mening vara fullt tillräcklig för att ge lärjungarna, vad av värde undervisningen i detta ämne verkligen kan ge ur såväl rent praktisk som formell synpunkt.

Geometriundervisningens mål kan sammanfattas i följande punkter:

1. Geometrien är ju vetenskapen om de begrepp, av vilka vår rumsuppfattning av tillvaron är sammansatt. Men vår rumsåskådning, seendet i rummet, är ej, i motsats till färgseendet, medfött, utan den kommer så småningom genom erfarenheten; den kan därför göras till föremål för uppfostran och undervisning. Geometriundervisningen avser att genom att göra lärjungarna rent praktiskt förtrogna med de geometriska begreppen och de omgivande

föremålens geometriska egenskaper uppöva deras rumsåskådning och öva deras formsinne.

2. Geometrien är en praktisk vetenskap. Den lär oss att kvantitativt behandla de geometriska storheterna: undervisningen avser att göra lärjungarna förtrogna med mätningar av olika slag i en, två och tre dimensioner.

3. Geometrien är en logisk vetenskap. Såsom sådan har den i alla tider haft det allra största anseende, och Euklides' Elementa har i århundraden betraktats som modellen till en fullkomlig och orubblig logik. Särskilt under medeltiden, då den Aristoteliska filosofien genomsyrade den vetenskapliga bildningen, var beundran för Euklides' verk mycket stor, och skolastikens störste filosof, Tomas från Aquino lär ha ställt sitt stora arbete »Summa theologica» som en parallell till Euklides' Elementa, i det han definierade Gud, såsom man definierar en rät linje eller en cirkel, och sedan därur logiskt härledde Guds egenskaper, liksom man härleder räta linjens och cirkelns egenskaper ur deras definitioner. Och då det gäller att utbilda och öva lärjungarnas logiska sinne, således att tillgodose den formella tanketräningen, är förvisso den logiska geometrien helt enkelt ett idealiskt undervisningsämne. Den logiska vetenskapen får här sin så gott som fullständiga tillämpning på ett relativt litet sakinnehåll, och emedan det rör sig om för lärjungarna lätt påvisbara, påtagliga realiteter, finns det ständigt bekvämt tillfälle att praktiskt påvisa för det logiskt outvecklade sinnet orimligheter, till vilka hans tankefel leda honom. Begreppsbildningen och definierandet, omdömesbildningen och slutledningen samt den logiska systembildningen äro tankeoperationer, med vilka lärjungarna genom geometristudiet bli förtrogna. Lärjungarna vänjas att röra sig med klara och tydliga begrepp, får känsla för betydelsen av att uttrycka sig korrekt: att varken säga för mycket eller för litet. Fordringarna härpå bidra således till att fostra lärjungarnas språkkänsla och deras förmåga av korrekt språkbehandling.

4. Geometriundervisningen, rätt lagd, ger lärjungarna

rikliga tillfällen till *självverksamhet*, både av rent praktisk och mera teoretisk art. Genom den lätthet, med vilken man är i stånd att få pojkarna att göra *upptäckter* dels genom noggrant och snyggt utförda ritningar och förfärdigade rumsmodeller, dels genom utnyttjande och uppövande av deras kombinationsförmåga på lösandet av geometriska problem, måste ämnet geometri anses besitta ett betydelsefullt såväl reellt som formellt bildningsvärde.

För att nu dessa geometriundervisningens olika uppgifter och mål skola bliva vederbörligen tillgodosedda, ligger det stor vikt uppå, att åt ämnet ges en riktig metodisk behandling. Nu är det icke så, att för ämnet finnes en och blott en enda saliggörande metod. Mycket kan tagas på flera olika sätt, det finns många vägar att välja på med avseende på olika detaljer, och mycket av den metodiska behandlingen kan vara en ren smaksak och ofta med avseende på lämpligheten vara beroende såväl av lärarens personliga läggning som av klassens allmänna ståndpunkt. Somligt av vad här säges har karaktären av allmänt erkända sanningar, om annat kunna delade meningar råda. Vad jag har att anföra blir i så fall ett uttryck för min personliga uppfattning.

Med avseende på ämnets metodik skulle jag vilja tala om tre olika stadier: det experimentella stadiet, det deduktiva stadiet och det systematiserande stadiet. Då nu varje stadium karakteriseras av en särskild metod, lämpad efter lärjungarnas ålder och förståndsutveckling, vill jag ej därmed ha sagt, att mellan de olika stadierna gå skarpa gränser, så att det ena stadiet definitivt slutar, där det andra tar vid. När man säger, att den första geometriundervisningen bör vara experimentell, betyder det ej, att varje deduktivt resonemang skall vara bannlyst från denna undervisning. I samband med de på experimentell väg vunna resultaten kunna enklare diskussioner, som ha karaktären av bevis utan att vara genomförda med all logisk stringens ofta vara på sin plats och liksom förbereda till det följande stadiet. På detta andra stadium blir den logiska

deduceringen huvudsaken. Men dock blott huvudsaken, icke allt. Det var nog det stora felet med gamla tiders geometriundervisning, att man visserligen började med vad man kallade »åskådningslära» det första året ämnet lästes, men sedan satte i gång den logiska apparaten, börjandes med axiom och definitioner och sedan den långa raden av propositioner, teorem och problem om varandra. Visserligen saknas inte i våra äldre skolordningar antydningar, som visa, att man även hade sinne för ämnets mera praktiska sida, men man tar nog ej alltför fel, då man påstår, att dylika föreskrifter mest stannade på papperet; vad man ansåg som geometriundervisningens a och o får bättre sitt uttryck i 1820 års skolordning, där visserligen en förberedande övning i åskådning av geometriska figurer anbefalles, t. o. m. med hänvisning till Pestalozzis »Åskådningslära», men där för övrigt säges, att »geometrien bör studeras som en ypperlig tankeövning, genom vilket förståndet vänjes att undersöka, innan man bedömer, samt att fordra redighet i uppgifter, ordning i slutföljder, klarhet i bevisen och bestämdhet i resultaterne».

Om således åskådningen aldrig får släppas och den deduktiva lärogången i det andra stadiet bör stödjas och omväxlas med experimentella metoder, bör här alltefter lärjungarnas fortgående förståndsutveckling deras logiska sinne allt mer och mer upptränas, och så småningom börja de få blick för, att det är ett helt tankesystem, de hålla på att bygga upp: en byggnad, till vilken de med sina resonemang och slutsatser själva foga sten vid sten.

Härmed förberedes det högsta stadiet, där den logiska systemutbildningen bör vara fullt medveten. Ej heller på detta stadium, som omfattar hela gymnasiet, och som bör avslutas i högsta ringen med översiktliga diskussioner av mera kritisk natur på sätt, som i det följande skall utvecklas, ej heller här får helt avskiljas moment, som karakteriserade det första experimentella stadiet, liksom naturligtvis parallellt med detsamma löper det deduktiva stadiet, så länge nytt geometriskt kunskapsstoff är att meddela.

Efter denna översikt av geometriundervisningens olika moment gå vi nu till en detaljgranskning av de olika stadiernas metodik. Det är då att märka, att ehuru undervisningsplanerna föreskriva, att planmässigt ordnade geometriska övningar skola börja först i tredje klassen, undervisningen i geometri faktiskt har tagit sin början redan i hemmet, långt innan barnet börjat skolan. Barnet har ej levat länge, förrän det stiftat bekantskap med sådana egenskaper hos föremålen och rummet omkring sig, som äro av geometrisk natur: riktningsbegreppet: uppåt och nedåt, höger och vänster, framåt och bakåt och andra riktningar i horisontell led, stor och liten, hög och låg, bred och smal, kantig och rund o. s. v. Barnet äger således redan då det börjar skolan vissa geometriska kunskaper, som visserligen äro planlöst hopade och utan ordning, men på vilka man tydligen har att bygga vid undervisningen i skolan.

Det geometriska begrepp, som först i skolan blir föremål för systematisk undervisning är längdbegreppet genom dess kvantitativa behandling i och med inlärandet av längdmåtten. Det är av vikt, att lärjungarna förvärva sig denna kunskap så åskådligt som möjligt genom av dem själva utförda mätningar i boken, i rummet och ute i fria naturen. I samband härmed bör man se till, att lärjungarna erhålla något så när riktiga föreställningar om de olika måttens storlek. De böra äga en mm-graderad linjal på 2 à 3 dm, få övning i att göra uppskattningar, som de själva få kontrollera, och, sedan decimalräkningen är införd, övas med uppskattning av 10-dels mm. Även av de större längdmåtten böra de få en konkret uppfattning. På hembygdens karta bör klassen få utpekat väglängder av 1 km och 1 mil. Längderna av tåg- och båtresor, som pojkarna ofta företaga, äro lämpliga att få uppskattade i km eller mil.

Även rymdbegreppet skall i 1:a klassen bli föremål för kvantitativ behandling genom införande av volymsmåtten l, hl, dl och cl. Även dessa storheters samband bör genom praktiska undersökningar åskådligt läras, och i samband härmed få lärjungarna lära känna de olika former, cylindern

och kuben, i vilka rymdmåtten vanligen framställas. Naturligtvis är det här icke fråga om några definitioner, blott uppräknandet av olika föremål, som lärjungarna känna, vilka hava cylindrisk och kubisk form, och så småningom en beskrivning av dessa geometriska former, mindre med avsikt att få fram en skarp definition än för att få lärjungarnas uppmärksamhet riktad på de egenskaper hos kroppar, som man särskilt intresserar sig för vid deras formbeskrivning. Att det således ej kommer an på t. ex. färg, hårdhet, material och dylikt, utan på antalet begränsande ytor och kanter och hörn, sidoväggarnas form, bottnens form o. s. v.

I och med ytmåttens inlärande i 2:a klassen är det den plana ytans kvantitativa behandling, som blir föremål för undervisning. I denna klass är det dock blott fråga om rektangelns yta. Även här gäller det att göra undervisningen så åskådligt levande som möjligt. Man börjar med att fråga efter, hur man brukar mäta och ange storleken av t. ex. klassrummets golvyta, och man är snart överens om, att det lämpligen bör ske genom angivande av hur många kvadrater av viss storlek, det behövs för att täcka golvet. Man börjar då med kvadratmetern, som läraren ritar upp på tavlan, och det går mycket väl an att fråga, vad man menar med en kvadrat. Man får många förslag, t. ex. en fyrkant. Man ritar då en fyrkant och frågar om det är en kvadrat. Nej, hörnen skola vara raka eller räta, som det rättas till. Är detta en kvadrat, säger man, och pekar på anslagstavlan, schemat e. d. och så fortsättes, tills lärjungarna lämnat en acceptabel beskrivning på kvadraten. Man kan här ej undgå att tala om vinklar, men det räcker att tala om räta och sneda vinklar tills vidare. Den räta behöver ej någon särskild förklaring; om man vill, åskådliggöres det ju omedelbart, att den är $\frac{1}{4}$ av ett varv. Men man bör ej på detta stadium *fordra* invändningsfria definitioner; först så småningom växer hos pojkarna själva fram behovet att få definitionerna logiskt riktiga. Sedan man resonerat fram, hur man genom mätning av längden och bredden i meter (och naturligtvis även utfört

mätningarna) fått reda på med hur många hela m^2 man kan täcka golvet, framträder behovet av mindre ytmått för att mäta remsorna av golvet, som blivit över. Så stiftas bekantskap med kvadratdecimetern, och kvadratmetern på tavlan inrutas i dm^2. Gäller det nu golvytan, så konstateras, att det fortfarande bli smala remsor över, men det tycker lärjungarna inte är något att bry sig om, när det är fråga om en så stor yta som klassrummet. De förstå dock, beträffande mindre ytor, t. ex. pulpetlocket eller en bokpärm eller dylikt, att de behöva mindre mått, och så införas cm^2 och mm^2. Det blir svårt att rita dessa ytmått på tavlan åtminstone mm^2, varför lärjungarna själva böra i sina böcker rita en kvadratdecimeter och indela denna i cm^2 och en av kvadratcentimetrarna i mm^2. Sedan behandlas de stora ytmåtten. Man börjar med 1 ar, som ritas upp på skolgården och rutas in i kvadratmetrar. En ruta på 100 m sida, 1 har, blir svårare att få upp utan tillgång till ett större fält, men sträckan 100 m känna de i allmänhet till, och den bör i alla händelser mätas upp, och sedan kunna de tänka sig rutan 1 har. Någon mindre begränsad yta, som de känna till, t. ex. i Stockholm Skeppsholmen eller Kastellholmen, böra de få veta ytinnehållet av. På hembygdskartan bör 1 km^2 uppmätas, t. ex. på Stockholmskartan få lärjungarna beskriva någon km^2, en på norr och en på söder, samt slutligen utpekas på kartan 1 mil^2. Det gäller således att till sorterna knyta konkreta föreställningar hos lärjungarna. Detsamma gäller vid införande av volymsserien m^3, dm^3, cm^3 och mm^3. Mycket lämpligt är här att låta lärjungarna såsom hemuppgifter själva förfärdiga kuber, sedan man i skolan låtit dem i den rutade räkneboken upprita deras nät. En grupp ålägges att göra kuben med 2 cm kant, en annan med 3 cm och en tredje med 4 cm kant t. ex. De böra vidare skriva på sina kuber en del data, som de själva upptäckt: sidoytans storlek och hur många kubikcentimetrar, som kunna få rum i den tillverkade kuben. Sedan låter man dem tillverka parallellepipeder av olika dimensioner och anteckna på desamma

olika data, och snart ha de på detta sätt naturligt fått klart för sig, hur man enkelt av längddimensionerna kan beräkna ytan och volymen. Av geometriska begrepp är det således rektangeln och parallellepipeden eller den lådformiga kroppen, som lärjungarna i denna klass närmare lära känna särskilt i kvantitativt avseende. På grund av de stora reduktionstalen för yt- och volymsmått är här lämpligt tillfälle att låta lärjungarna på ett naturligt sätt få stifta bekantskap med de stora talen, och man har många tacksamma tillfällen att ställa pojkarna inför överraskande resultat. Så t. ex. ha de i allmänhet en mycket felaktig föreställning om vad en m^3 kan rymma, innan de med egna ögon få se, att den bekvämt kan rymma 10 à 12 pojkar från klassen och räknat ut, att den rymmer 10 st. vanliga hl-säckar. Överraskande verkar resultatet, att på en mil^2 rymmes 100 000 000 människor, och ändå har varje människa ett svängrum av en hel m^2, eller att ledigt hela mänskligheten utan att trängas skulle få rum på Vänerns isbelagda yta. Att klassrummet skulle kunna rymma flera millioner tändsticksaskar, är resultatet av en nyttig beräkningsuppgift, och mycket tacksamt är det att visa lärjungarna en bild av en kubikkilometer, som man i hörnen möblerat upp med t. ex. Stockholms slott, Cheopspyramiden och Eiffeltornet, vilket tar sig mycket nätt ut i den väldiga salen. (En sådan illustration förekommer i Asperén-Damms lärobok i räkning.)

Medan i klasserna 1 och 2 geometriska spörsmål varit på tapeten mera i förbigående och i samband med andra matematikundervisningens uppgifter, skall en mera planmässigt ordnad geometriundervisning taga sin början i 3:e klassen. Vad och huru mycket, som skall medtagas i denna kurs, är av mindre betydelse, då det ej gäller förvärvandet av någon bestämd mängd geometriska kunskaper, utan avsikten mera är att låta lärjungarna genom praktiska övningar och eget arbete vinna förtrogenhet med de geometriska fundamentalbegreppen: ytor och plan, kurvor och räta linjer, vinklar och trianglar, parallellogrammer, cirklar

o. s. v. I samband härmed få lärjungarna tillfälle att öva sig i användande av mätlinjalen, passaren och gradskivan, de tre instrument, med vilka varje lärjunge skall vara försedd i denna kurs. Man bör undvika att göra kursen ensidigt plangeometrisk; tvärtom är det psykologiskt och pedagogiskt riktigast att taga som utgångspunkt kropparna i rummet, antingen då de vanliga föremålen eller gjorda modeller. Ofta kan det vara lämpligt att ställa för lärjungarna en modell: ett prisma, en cylinder, en pyramid, en kon, och fråga dem, om de någonstans sett en så formad kropp. Nu är det ju så, att de geometriska kropparna i allmänhet ej förekomma rena i arkitekturen utan stympade och bitvis samt i varandra. Tycker man, att lärjungarna äro för fattiga på exempel, blir det en lämplig hemuppgift, att de till nästa gång skola göra iakttagelser ute och hemma på torn, fasader, ornament och pelare och sedan tala om, vilka modeller de på detta sätt träffat på och känt igen. De enklaste modellerna, prismat, pyramiden, cylindern och konen böra de själva förfärdiga av papper, sedan man i skolan diskuterat, hur nätet skall se ut och ritat detsamma. Detta är uppgifter, som roa dem mycket och framför allt bidraga att ge dem konkreta föreställningar om de geometriska begreppen. En och annan trådmodell, i vilken så att säga kroppens inre är åtkomligt, är nyttigt att någon gång förevisa och diskutera.

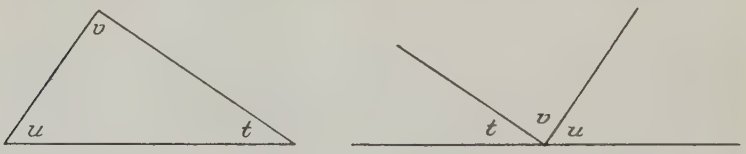
Genom de praktiska övningarna i planet, i ritboken, få de lära känna en hel del geometriska satser och utföra de enklaste geometriska konstruktionerna. *Vilka* satser, de på detta sätt få lära sig, är, som redan sagts, oväsentligt. De böra väljas ur synpunkten, att de äro enkla och lätta att praktiskt verifiera. Av konstruktionsuppgifterna (utförda rent geometriskt med passare och linjal eller därjämte med hjälp av gradskiva, hopvikt papper för erhållande av rät vinkel etc.) vill jag nämna: att dela en linje och en vinkel mitt itu, draga normaler till en linje, konstruera trianglar efter givna element, sidor och vinklar. Dylika konstruktioner böra utföras ej blott i boken och på tavlan

utan även i fältet. Av teorem, vilka de genom praktiska övningar få lära känna, nämner jag satserna om vertikalvinklar, alternatvinklar, satsen om en triangels vinkelsumma, vinklarna i likbenta och liksidiga trianglar, periferivinklar i halvcirklar, olika kordors längder i en cirkel, satsen om cirkelns omkrets och yta, parallellogrammens egenskaper o. s. v. Slutsatserna böra i varje fall dragas, genom att alla lärjungarnas resultat jämföras med varandra.

I samband med dessa övningar kan man ge lärjungarna tillfälle att som text bredvid sina figurer använda de vanliga geometriska beteckningarna såsom $\wedge$, $\triangle$, $>$, $\perp$ o. s. v.

Mätningar och beräkningar, som låta sig kontrolleras, äro synnerligen lämpliga. T. ex. en mycket bra uppgift är att efter förelagda mått på sidorna rita en triangel, konstruera de tre höjderna och på tre olika sätt beräkna ytan. Att höjderna gå genom en och samma punkt fäster sig nog en och annan vaken pojke vid, annars bör man leda deras uppmärksamhet in på denna sak och få dem att inse, att i detta ligger något egendomligt och anmärkningsvärt.

Satsen om en triangels vinkelsumma är ju av särskilt intresse och bör verifieras ej endast genom vinkelmätningar. Jag erinrar om följande metod, som på grund av sin påtaglighet gillas av pojkarna. De få klippa ut en triangel och vika in hörnen, så att vinkelspetsarna stöta ihop i någon höjds fotpunkt. Ett annat trevligt sätt är att klippa av vinklarna och klistra fast dem bredvid varandra:



Ehuru på detta stadium de praktiska övningarna äro huvudsaken, bör man, som redan inledningsvis framhållits, ej lämna tillfällen till deduktiva resonemang obeaktade. T. ex. satsen om vertikalvinklar. Sedan de genom mätningar med gradskivan funnit, att de äro lika stora, kan man

rita figuren på tavlan och fråga lärjungarna, om man inte utan mätning skulle kunna ha insett att vertikalvinklarna äro lika stora? Ett svar, som man då har att vänta, är, att det syns utan vidare, utan mätningar. Detta får vederläggas med motfrågan, om man vågar säga, att det syns, att de äro *precis* lika stora. Kan det ej tänkas att den ena är en halv grad större än den andra, utan att detta märks, såvida man ej gör en noggrann mätning. *Om* då någon skulle komma på den invändningen, att då kan man ej heller lita på mätningen, ty skillnader på t. ex. $\frac{1}{10}^{\circ}$ kunna ej då upptäckas, får man vara mycket nöjd, annars får man själv leda lärjungarna till denna reflexion. Betydelsen av många mätningar jämförda med varandra kommer då fram. Att de dock äro *precis* lika stora kanske man kan resonera sig till? Och vad som än sägs eller svaras, nog får man synpunkter, som visa, att det visst ej är bortkastat arbete med dylika resonemang. Men utformandet av några bevis med antaganden, påståenden och bevisföring eller tal om axiom o. d. är det naturligtvis ej fråga om, ej heller några läxor i det avseendet.

Andra satser, som de kunna »bevisa», d. v. s. inse utan försök: Hur stor är vinkelsumman i en fyrhörning? Sedan böra de praktiskt verifiera den, t. ex. genom att klippa av hörnen och klistra dem bredvid varandra, som nyss nämndes ang. triangeln. Vinkelsumman i en femhörning e. d.

Vad kan man säga, utan mätning, om vinklarna i en liksidig triangel eller vinklarna i vinkelhakarna, sedan satsen om basvinklarna i en likbent triangel genom experiment är klar? o. s. v.

Om man på detta sätt försiktigt då och då kommer med bevis, få lärjungarna snart ögonen öppna för att bevisen erbjuda genvägar i motsats till försöksmetoden och att deduktionsmetoden är absolut bindande i motsats till försöken, som blott gälla inom försöksfelens gränser och bli att lita på först i mån av de använda instrumentens tillförlitlighet och med mångfalden av noggrant utförda försök.

(Forts.)

Om de elektriska jordströmmarna.[1]

Av DAVID STENQUIST.

W. H. Barlow har i Philosophical Transactions of the Royal Society of London för 1849 publicerat en avhandling, där han beskriver och närmare studerar de spontana utslag som han iakttagit — första gången 1847 — hos nålarna tillhörande den elektriska telegrafen vid Midlandjärnvägen. Telegrafsignalerna gåvos med hjälp av ett galvaniskt batteri genom rörelserna hos en magnetnål, som var upphängd på en fin tråd i mitten av en spole. Telegrafledningen hade en jordförbindelse i vardera ändpunkten och då en ström får gå fram genom ledningen, går den tillbaka på grund av jordens ledningsförmåga. Då telegrafinstrumentet ej användes bortkopplas batteriet men ledningen fick behålla sina jordförbindelser. Det var vid detta tillstånd hos ledningarna, som spontana strömmar iakttogos, då de framkallade avvikningen hos nålarna.

Den iakttagna strömmen är en summa av den ström, som beror av elektromotoriska kraften vid elektroderna (elektrodströmmen) och den verkliga jordströmmen. När det är fråga om mycket starka jordströmmar (vid magnetiska oväder) kan man helt bortse från den relativt svaga elektrodströmmen. Vid studiet av jordströmmens variation (dagliga, årliga och elvaåriga perioden) elimineras den tämligen konstanta elektrodströmmen vid medeltalsbildningarna. Om i det, som här betecknas som elektrodström, inneslutes även en konstant svag verklig jordström, kan för närvarande ej avgöras. D. v. s. den s. k. konstanta jordströmmens existens kan varken bevisas eller förnekas med till buds stående mätanordningar. Med en

[1] Samma ämne är utförligare behandlat av förf. i Etude des courants telluriques. Mémoires publiés par la Direction Générale des Télégraphes de Suède, Stockholm 1925.

dylik ström, som man tänker sig gå fram i en kontinuerlig följd av 1 cm breda band kring jorden och vars styrka i varje band är 0,78 ampère, skulle jordmagnetismens konstanta del kunna förklaras.

Såsom exempel på huru jordströmsmätningar utföras, beskrives här en dylik från Stockholms telegrafstation den 19 maj 1910. Telegrafledningarna Stockholm—Göteborg och Stockholm—Sundsvall användes. Innan mätningarna började, uppmättes motståndet på de båda ledningarna. Det var 2 940 ohm på den förra och 2 336 ohm på den senare. Strömstyrkorna uppmättes med milliampèremetrar, på vilken en skaldel motsvarade 0,1 milliampère. Observationer gjordes var minut. Ström från Stockholm till Göteborg och från Sundsvall till Stockholm betecknas med +. Genom att multiplicera strömstyrkorna med $\frac{R}{l}$, där R betyder ledningens motstånd i ohm och l avståndet i km fågelvägen mellan de båda ändpunkterna, erhålles spänningsfallet i millivolt pr km.

Komposanterna V och V' (i millivolt pr km) i riktningarna $E—W$ och $N—S$ erhålles ur formlerna

$$V = \frac{V_1 \sin \beta - V_2 \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)},$$

$$V' = \frac{V_2 \cos \alpha - V_1 \cos \beta}{\sin (\beta - \alpha)},$$

där

V_1 = potentialskillnaden i millivolt per km på Göteborgsledningen,

V_2 = potentialskillnaden i millivolt per km på Sundsvallsledningen,

α = vinkeln mellan riktningen Stockholm—Göteborg och $E—W$,

β = vinkeln mellan riktningen Sundsvall – Stockholm och $E—W$.

Formlerna erhållas genom att projiciera på V_1 och V_2:

$$V_1 = V \cos \alpha + V' \sin \alpha,$$
$$V_2 = V \cos \beta + V' \sin \beta.$$

Dessa båda ekvationer lösas med avseende på V och V' och övergå då till de två förut nämnda ekvationerna.

Ur de geografiska koordinaterna för Stockholm, Göteborg och Sundsvall beräknas avståndet mellan ledningarnas ändpunkter till 403 km (Sthm—Gbg) och 337 km (Sthm—Sv.). Ur samma koordinater erhållas α till 26° 40′ och β till 96° 26′. Av det föregående får man följande slutformler för beräkningen:

$$V = 7{,}73\, I_1 - 3{,}32\, I_2,$$
$$V' = 0{,}8711\, I_1 + 6{,}60\, I_2,$$

då I_1 och I_2 betyda de observerade strömstyrkorna på Stockholm—Göteborg och Sundsvall—Stockholmsledningarna.

Den normala jordströmmens dagliga och årliga variation. Elvaårsvariationen.

Weinsteins berömda arbete Die Erdströme im deutschen Reichetelegraphengebiet, Braunschweig 1900, bildar epok inom jordströmsforskningen. Genom Weinstein erhölls en fullständig bild av jordströmmens dagliga och årliga variation för en punkt på jorden. Knappt något annat geofysiskt fenomen visar en så regelbunden gång på medelhög latitud som jordströmmens dagliga variation, framhåller Weinstein med rätta. Vad A. von Humboldt säger om magnetnålens rörelse under dagens lopp i tropikerna gäller om jordströmmen i full utsträckning på tämligen höga breddgrader. Men Weinsteins undersökning avser endast *en* plats på jorden. I fråga om möjligheten att få en överblick över den dagliga variationen, då det gäller hela jorden, säger samme författare, att från det målet är man långt fjärran. Omkring tio år efter det Weinsteins arbete såg dagen, publicerade en annan framstående jordmagnetiker A. Nippoldt en synnerligen värdefull under-

sökning i Meteorologische Zeitschrift (1911), där han diskuterar det då föreliggande jordströmsmaterialet. Nippoldt kommer emellertid till det resultatet, att problemet är mycket komplicerat och att olika klasser av fenomen dominera på långa och korta ledningar. Häri ligger, säger han, ett för fortsatt forskning nedslående moment. Sedan Nippoldt utgav sin avhandling, har emellertid tillkommit ganska mycket nytt observationsmaterial. Jag har på grund härav ånyo tagit upp frågan om den normala jordströmmens dagliga variation.

Från 1910 års början föreligger från Observatorio de fisica cosmica del Ebro, tillhörande jesuitorden en utomordentligt värdefull serie jordströmsiakttagelser. Detta observatorium är beläget nära den spanska staden Tortosa på 41° nordlig bredd.

Jordströmmens variationer i de två riktningarna magnetiskt N—S och E—W uppmätes med två Desprez-d'Arsonvals galvanometrar med fotografisk registrering.

Av det spanska observationsmaterialet har jag bearbetat observationsserierna för åren 1910, 1912, 1913, 1916, 1917 och 1918. Varje år omfattar 17 520 timobservationer (två ledningar) eller tillsammans över 100 000 iakttagelser. De magnetiska stormarna avtaga som bekant hastigt i styrka i samma mån som observationsortens avstånd från polen ökas. På Ebroobservatoriets breddgrad (41°) äro störningarna så obetydliga, att det visat sig lämpligt att medtaga alla de observerade värdena vid medeltalsbildningarna utan någon som helst uteslutning av störda dagar.

Fig. 1 åskådliggör jordströmmens dagliga variation under årets månader och fig. 2 samma variation under de olika årstiderna i Spanien. Axlarnas riktningar hos vektordiagrammen motsvara ledningarnas, d. v. s. tillnärmelsevis magnetiskt norr och öster. Skalan för östkomposanten är tagen tio gånger så stor som för nordkomposanten. En jämförelse mellan dessa diagram och de av Weinstein för Tyskland erhållna ger vid handen, att alldeles samma allmänna lagar gälla. Men de spanska ledningarnas längd uppgingo ej till en

hundradel av de tyska ledningarnas. Härav följer, att — i motsats till vad Nippoldt ansett sig ha funnit — samma lagar gälla för korta och långa ledningar.

I fig. 3 har jag sammanfört det spanska materialet, så att varje år är taget för sig. Även här sammanfalla axlarnas riktningar med ledningarnas, och ostkomposanten har tio gånger så stor skala som nordkomposanten. Diagrammen för åren 1910, 1912 och 1913 äro betydligt mindre än för åren 1916, 1917 och 1918. De tre förra åren höra till de solfläckfattiga och de tre senare till de solfläckrika i den elvaåriga perioden.

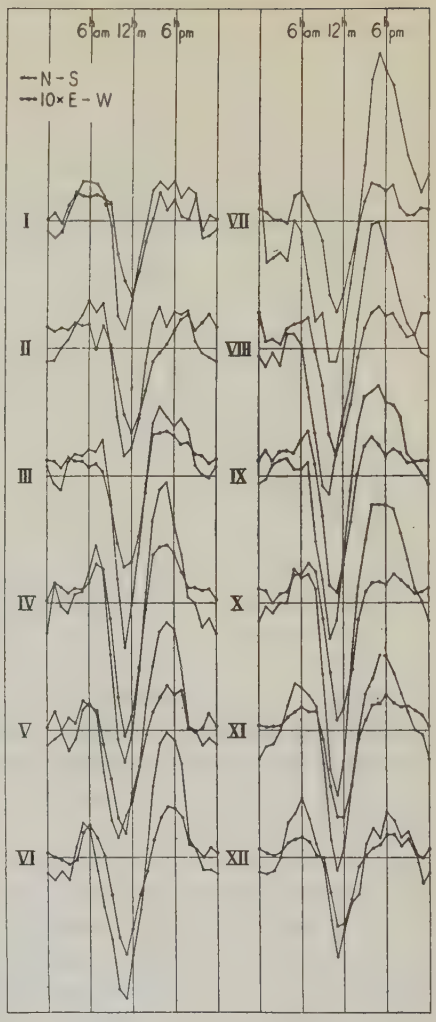


Fig. 1.

I november 1921 började mätningar av jordströmmarna med ett självregistrerande mätinstrument (ej fotografiskt) på Telegrafverkets provningsanstalt i Stockholm. Två telegrafledningar, den ena till Vaxholm (20 km) och den andra till Södertälje (28 km) kommo till användning. Ström från spårvägsnätet störde mycket dessa mätningar. På grund härav flyttades det självregistrerande instrumentet till Älvsjö under

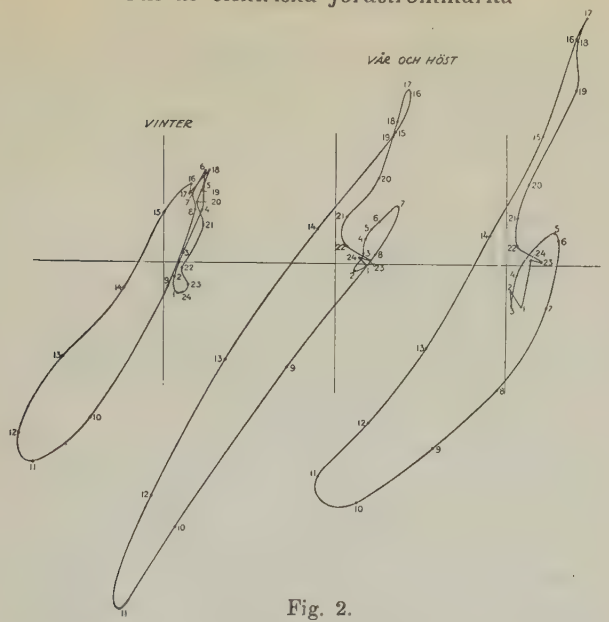


Fig. 2.

augusti 1923. Här användes två särskilt för dessa mätningar iordningställda luftledningar om 1,7 och 1,3 km:s längd. Ledningarnas elektriska motstånd tillsammans med

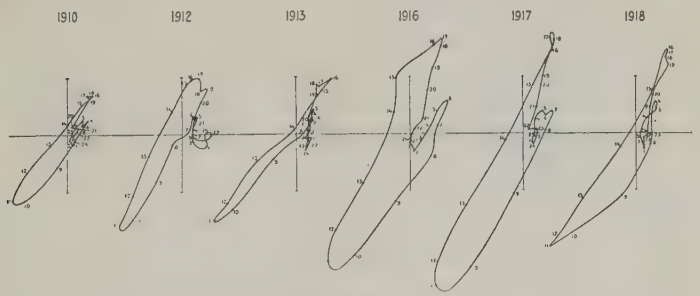


Fig. 3.

instrumentets äro omkring 800 och 700 ohm. Ledningarnas riktningar äro 26° *E* och 68° *W* räknat från sydlinjen. Jordplåtarna äro av koppar och ha en yta av 60 × 45 cm samt äro placerade 55 cm. under jordytan. Då skalan på

instrumentets pappersremsa är indelad i tjugondels milliampère, kan man avläsa en tvåhundradels milliampère. Varje skaldels storlek är 1,65 mm. Skalområdet är 3 milliampère. Genom ett urverk föres pappersremsorna fram 12 cm i timmen.

I augusti och september 1924 uppsattes självregistrerande instrument på telegrafstationerna i Lund och Luleå, under det att registreringen i Älvsjö upphörde. I Lund uppmätes strömmen på två ledningar till Landskrona och Eslöv. Luleåinstrumentet flyttades i maj 1925 till Övertorneå. Dessutom har ett nyanskaffat instrument vid samma tidpunkt uppsatts på Jokkmokks telefonstation.

Av iakttagelserna på dessa stationer, jämförda med äldre observationsserier, har framgått, att jordströmmens dagliga variation är enkelperiodisk på höga breddgrader och dubbelperiodisk för låga breddgrader. För orter nära ekvatorn är jordströmmen mycket svag och möjligen enkelperiodisk (Batavia). Den äldre uppfattningen enligt Nippoldt är, att strömmen är enkelperiodisk på korta ledningar och dubbelperiodisk på långa. På de förra skulle enligt samme forskare jordströmmen följa de luftelektriska och på de senare de jordmagnetiska fenomenen.

Ur data från Ebroobservatoriet ($u = 41°$), Lund ($u = 34°$) och Luleå ($u = 24°$) har jag beräknat det dagliga jordelektriska fältets potential. Utgångspunkt är jordströmsvariationens ostkomposant (E) uttryckt i millivolt per kilometer. För de tre observationsorterna och ekvatorn erhålles följande fyra ekvationer:

$u = 24°$

$$E = -8{,}0 \cos \lambda + 7{,}4 \sin \lambda - 5{,}2 \cos 2\lambda + 7{,}6 \sin 2\lambda;$$

$u = 34°$

$$E = +3{,}6 \cos \lambda + 3{,}7 \sin \lambda - 7{,}1 \cos 2\lambda - 3{,}8 \sin 2\lambda;$$

$u = 49°$

$$E = -1{,}4 \cos \lambda + 2{,}0 \sin \lambda + 2{,}8 \cos 2\lambda - 1{,}1 \sin 2\lambda;$$

$u = 90°$

$$E = 0.$$

Under antagande, att koefficienterna variera som räta linjer mellan de kända punkterna, har jag beräknat en tabell för dessa koefficienters storlek för var femte breddgrad. Med denna tabell ha följande uttryck beräknats för koefficienternas variation med poldistansen:

$$a_1 = -4{,}8 \cos u - 4{,}0 \cos 3u - 2{,}1 \cos 5u,$$
$$b_1 = +6{,}2 \cos u + 1{,}7 \cos 3u + 0{,}3 \cos 5u,$$
$$a_2 = -4{,}0 \cos u - 3{,}0 \cos 3u - 0{,}9 \cos 5u,$$
$$b_2 = +3{,}7 \cos u + 4{,}1 \cos 3u + 1{,}8 \cos 5u.$$

Den dagliga variationens ostkomposant kan då beräknas för varje punkt på jorden ur ekvationen:

$$E = a_1 \cos \lambda + b_1 \sin \lambda + a_2 \cos 2\lambda + b_2 \sin 2\lambda.$$

Slutligen erhålles potentialen V ur uttrycket:

$$V = \int \sin u E d\lambda + C.$$

Vid räkningens utförande har jag först räknat ut en tabell för E för var femte längdgrad och var tionde breddgrad. Sedan tabellens tal multiplicerats med $\sin u$, har integreringen skett numeriskt. Slutligen har anomalien beräknats. Med de erhållna anomalierna ha isanomalerna

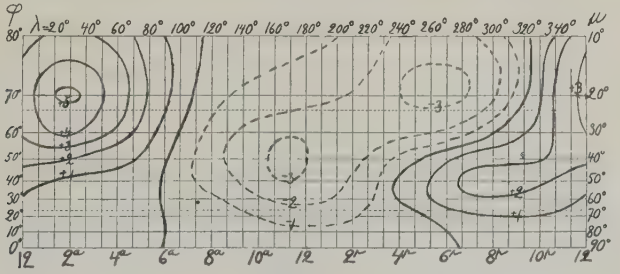


Fig. 4.

(ekvipotentiallinjerna) uppdragits på ett gradnät. Den erhållna kartan (fig. 4) visar ett maximum för höga breddgrader under natten och ett minimum för låga breddgrader strax före kl. 12 middag. Ett nära samband råder mellan jordströmmarnas och jordmagnetismens dagliga variation. Sannolikt är det fråga om två sidor av samma fenomen.

Periodiska störningar. Dagliga och årliga variationen. Elvaårsvariationen.

För att jordströmmen skall störa telegraftrafiken måste i allmänhet dess styrka överstiga 150 millivolt per km. Då de ledningar, som användas för telegraferingen, ha ett motstånd på omkring 10 ohm per km, blir strömstyrkan, som motsvarar ovanstående spänningsfall, 15 milliampère.

Undersökes störningarnas fördelning under dygnets timmar, finner man, att ett maximum inträffar några timmar

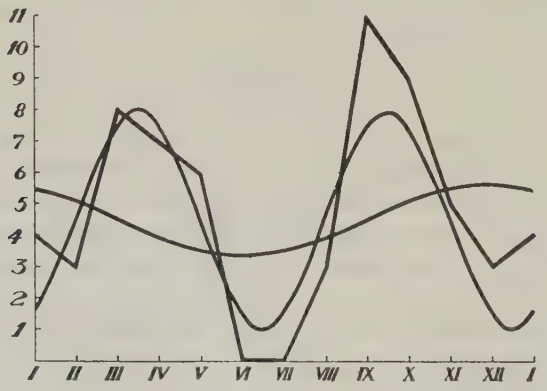


Fig. 5.

efter solnedgången samtidigt med dygnets norrskensmaximum.

I följande uppräkning har jag angivit antalet dagar, fördelade på årets månader, då dylik ström iakttagits på Stockholms Centraltelegrafstation under de tre åren nov. 1906—nov. 1909: jan. 4, febr. 3, mars 8, april 1, maj 6, juni 0, juli 0, aug. 3, sept. 11, okt. 9, nov. 5, dec. 3.

Man finner, att de flesta dagar med stark jordström inträffat under månaderna mars, september och oktober. Under juni och juli finnes ingen störd dag och under vintermånaderna är fenomenet också svagt utbildat. Endast

en störd dag finnes under april. Om undersökningen omfattat ett större antal år, är det troligt, att resultatet blivit ett annat. Därför har jag för april antagit talet 7 $\left(=\frac{8+6}{2}\right)$, då jag med harmonisk analys beräknat de två första termerna motsvarande helårs- och halvårsperioden (fig. 5).

Jordströmsdagarnas fördelning på de olika årstiderna förklaras enligt ARRHENIUS på följande sätt. Solfläckarna förekomma i två zoner på en bredd av 5°—30° norr och söder om solekvatorn. Nu bildar solens ekvatorialplan en liten vinkel med ekliptikan (jordbanans plan). Denna vinkel uppgår till 7°. Solens ekvatorsplan och ekliptikan skära varandra längs en rät linje, som går genom de två s. k. noderna på ekliptikan. Jorden befinner sig i dessa noder

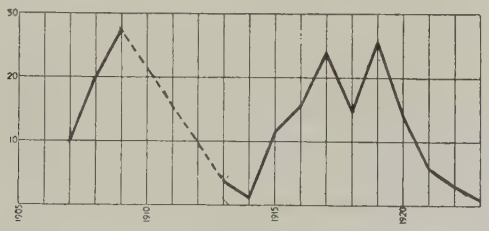


Fig. 6.

den 3 juni och 5 december. Såsom förut nämnts, förekomma solfläckar relativt sparsamt i närheten av solekvatorn. Men det är just denna lugna del av solytan, över vilken jorden befinner sig den 3 juni och 5 december. Omkring dessa båda tidpunkter på året hava ett fåtal jordströmsdagar inträffat, under juni och juli inga alls. Helt annat blir förhållandet under vår- och höstmånaderna. Jorden befinner sig då över synnerligen aktiva trakter av solen. Under mars och maj samt september och oktober har man ett stort antal jordströmsdagar. Att sommarminimet är mera utpräglat än vinterminimet förklaras därav, att jordbanan ej är cirkelrund utan elliptisk, och att jorden befinner sig närmare solen om vintern än om sommaren.

Under solfläcksrika år äro störningarna talrikare än annars. Under de solfläcksrika åren 1916—1920 måste telegraftrafiken avbrytas längre eller kortare stunder under omkring tjugu dagar per år. Under det solfläcksfattiga året 1914 var det nödvändigt att avbryta trafiken endast två gånger. I diagrammet fig. 6 framträder den elvaåriga perioden tydligt.

Magnetiska oväder.

Någon gång inträffa mycket starka störningar, de s. k. magnetiska stormarna. Den 25 september 1909 utbröt ett dylikt magnetiskt oväder.

Kraftiga jordströmmar störde telegraftrafiken över hela jordklotet. På Stockholms telegrafstation började jordströmmarna mellan 9 och 10 på morgonen. De överstego dock ej 100 millivolt/km förrän 12,50 e. m. Vid denna tid stegrades strömmarna inom loppet av ett par minuter upp till en styrka som översteg 2,5 volt per km på flera ledningar, t. ex. Stockholm—Oslo. Mellan 12,50 och 5 e. m. understeg spänningen sällan 1,35 volt/km. På telefonstationen märktes jordströmmarna först på Luleåledningen. Den vid denna ledning tjänstgörande telefonisten fick en häftig stöt. Halva handen blev vit och två fingrar känslolösa. 2 à 3 minuter efter 12,50 märktes även synnerligen starka störningar på de flesta södergående linjer. Troligen skedde den starka stegringen i alla riktningar fullt samtidigt. Då man fattade en mikrofon med handen, omgåvos båda med ett intensivt diffust ljus och handen träffades av gnistor, som åstadkommo brännblåsor. En mätning å en 4,5 mm dubbeltrådig kopparledning mellan Stockholm och Luleå gjordes i Stockholm och gav 120 volt mellan ledningens ändpunkt i Stockholm och jorden. Ledningen var vid detta tillfälle isolerad i Luleå. Omkring 11 på kvällen hade jordströmmens spänning nedgått till 150 mv/km och kl. 1 på morgonen den 26 september uppgick den endast till 40 à 50 mv/km även på de längre ledningarna. På 4 mm järnledningen

Gällivare—Luleå observerades vid flera tillfällen under dagens lopp spänningar upp till 350 volt. Då denna ledning är 205 km lång, erhålles 1,7 volt per km.

I Göteborg gjordes följande observationer. 12,50 e. m. slogo ankarna ned på ledningarna till Falköping. På linjerna till Strömstad och Hälsingborg däremot var jordströmmen icke så stark. Jordströmmen iakttogs och mättes på en ledning Falköping—Göteborg, som hade ett motstånd av omkring 1 000 ohm. Den ström, som iakttogs på ledningen, växlade ständigt styrka, merendels var den dock över 40 milliampère. Den högsta styrka, som mättes, var 135 milliampère, motsvarande en potentiallskillnad på 135 volt eller 1,18 volt per km. I början hade strömmen riktningen Falköping—Göteborg, men senare ändrade den ganska ofta riktning, varvid visaren på mätinstrumentet sakta gick över från den ena sidan till den andra. Liknande iakttagelser gjordes på de flesta övriga svenska telegrafstationer.

Ett synnerligen praktfullt norrsken observerades från en mängd platser under samma dag. Det var synligt ännu på så låg breddgrad som Mallorcas. I Sverge iakttogs norrskenet från Karesuando till Karlshamn och Kristianstad. På många orter iakttogs en väl utbildad norrskenskorona. Man kan räkna ut ur observationerna, att över Sverge befunnit sig ett fält av parallella strålar, vars sydgräns varit en linje från Hälsingborg till Västervik. Ett annat norrskensfält sträckte sig över Island, Grönland och Norra Amerika. På alla magnetiska observatorier iakttogos kraftiga störningar.

Under pingstdagarna 1921 störtes telegraftrafiken över stora delar av jorden av det kraftigaste magnetiska oväder, som hittills iakttagits, särskilt under natten till pingstaftonen (13—14 maj) och under natten till pingstdagen (14—15 maj). Här anföras några iakttagelser i Stockholm. Den 13 maj anmäldes på Stockholms telefonstation fel å ledningen Stockholm—Hälsingborg kl. 2 e. m. Då den i prov- och omkopplingsväxeln tjänstgörande vaktförestån-

daren skulle gå in i ledningen för att utröna felets läge, fick hon en kraftig stöt, varför hon väntade en liten stund, innan hon gjorde ett nytt försök att prova ledningen. Då hon förnyade försöket var urladdningen så kraftig, att hon fick brännblåsor på fingrarna. Vid ungefär samma tidpunkt uppstod fel å tio andra södergående ledningar.

Samma dag 10,20 e. m. hördes ett starkt brus å nästan alla söder- och västergående ledningar, samtidigt tändes signallamporna på dessa ledningar på grund av jordförbindning genom åskledaren å dubbelledningens ena bransch och telefonisterna fingo kraftiga stötar. Efter någon stund kunde signallamporna släckas på vanligt sätt utom på några Göteborgsledningar. Sedan tändes signallamporna på söder- och västergående ledningar upprepade gånger under natten.

Natten till pingstdagen förstördes stora delar av Karlstads telefonstation sannolikt på grund av jordström. Två telefonister märkte vid tvåtiden på natten, huru den ena klaffen efter den andra å en del riksledningar föllo, samtidigt som en svag osande rök sipprade ut från klaffarna. Klaffallen, röken och oset upphörde snart och allt var lugnt till kl. 3, då brandrök plötsligt framträngde vid prov- och omkopplingsväxeln samt vid riksexpeditionens nattavdelning. I överkopplingsrummet brann det i kabelpartierna mellan åskledarna och taket. Innan elden kunde begränsas, hade den spritt sig så, att stora delar av stationsinredningen blevo förstörda.

Av intresse torde vara att söka utreda, huru starka de elektriska strömmarna varit. Hittills har man ansett, att de elektriska spänningsdifferenser, som kunde uppstå i marken, kunde uppgå till högst omkring 2 volt per km. Under natten 14—15 maj har detta värde högst betydligt överskridits. I ett flertal fall ha strömmarna på 3 mm:s kopparledningar varit så starka, att smältrören förstörts, d. v. s. strömmens styrka har överskridit 2,5 ampère. Emedan nyssnämnda kopparledning har 2,5 ohms motstånd per km, kommer man till ett spänningsfall i marken på

6,3 volt per km. Däremot ha smältrören på 4 mm:s järnledningar hållit stånd mot strömmen. Dessa järnledningar har 8 ohms motstånd per km. Man vet härav, att 20 volt per km ej överskridits. Med tämligen stor visshet torde man kunna utgå från att spänningsfall på 10 volt per km ha förekommit. På långa avstånd leder detta värde till mycket stora spänningsfall. Om en 100 km lång 4,5 mm:s kopparledning (1,1 ohms motstånd per km) kommer in på en station och strömstyrkan antages till en ampère, kan man under ganska långa tidsperioder få spänningsfall inom stationen, som uppgå till $1\,000 - 1{,}1 \times 1 \times 100 = 890$ volt, och en effekt på lika många watt. Skulle strömstyrkan ha varit 2 ampère, blir spänningsfallet inom stationen $1\,000 - 1{,}1 \times 2 \times 100 = 780$ volt och effekten $780 \times 2 = 1\,560$ watt. Att inredningen på en station skall kunna hålla stånd mot så stora strömstyrkor och spänningar utan att antändning sker är ej sannolikt. Det är nog därför ganska möjligt, att jordströmmen varit den direkta anledningen till branden i Karlstad, ehuru man ju med fullt fog endast med ytterlig tvekan har kunnat förutsätta detta.

Direkta uppmätningar av strömmarna då det magnetiska ovädret nådde sin höjdpunkt, saknas nästan alldeles. I något enstaka fall har mätning skett. Så uppmättes å Store Nordiskes Göteborgsstation den 15 kl. 1,15 f. m. å telegrafledningen n:r 26 till Stockholm jordströmmen till 1,1 ampère.

Telegraf- och telefonstationen i Ånge hotades under detta magnetiska oväder av en liknande olycka, som drabbade Karlstadsstationen. Olyckstillbudet upptäcktes likväl i tid, och nödvändiga försiktighetsmått kunde vidtagas. Även i Norra Amerika strax utanför Newyork förstördes vid samma tillfälle en telegrafstation genom antändning på grund av jordström.

Under de dagar det magnetiska ovädret varade iakttogos kraftiga norrsken. Även på södra halvklotet observerade man polarsken. Det jordmagnetiska fältet var även starkt stört.

Att stora elektricitetsmängder voro i rörelse under den magnetiska stormen under pingsten 1921 framgår av följande iakttagelse. Flaggstyrman P. O. Jonsson har meddelat mig ett fenomen, som han och en annan person iakttogo den 15 maj kl. 3,15 på morgonen. De båda observatörerna befunno sig på omkring 150 m avstånd från Kalmar slott, då de märkte, att en starkt lysande materie utgick från åskledaren på slottets högsta torn. Den lysande materien föll med ett svagt ljud på torntaket, studsade och föll i en något böjd linje till marken. Ljuset hade blågrön färg liknande den, som man iakttar då zink brinner. Fenomenet påminner å ena sidan om en klotblixt, å andra sidan om St. Elmseld.

Stockholm, Telegrafverkets provningsanstalt, 1926.

Ett likriktaraggregat med glimljuslampan som likriktare.

Av A. FRENDEL.

I en uppsats om glimljuslampan i »Phywes» månadsskrift, »Praktische Schul-Physik» (n:s 11 och 12, år 1921) har d:r H. Kröncke även beskrivit den likriktarverkan, som kan ernås med en glimljuslampa med för detta ändamål särskilt avpassad konstruktion. Då det vid den skola, där jag för närvarande undervisar, endast finnes tillgång till växelström, inköpte jag för två år sedan en glimljuslikriktarlampa, huvudsakligen för skolförsök över elektrolys. Den har under dessa år fungerat oklanderligt och aldrig klickat. Tyvärr tillåter emellertid en sådan lampa icke högre strömstyrka än 0,2 amp., då den annars blir alltför varm. Jag har därför sammansatt ett aggregat av två parallellkopplade likriktarlampor, varje lampa i serie med ett glidmotstånd, såsom den schematiska fig. 1 visar. (*E* och *F* äro lamporna. Växelströmmen insläppes vid *A* och likströmmen uttages vid *L*.) Med denna anordning, som visat sig fungera förträffligt, kan man få en strömstyrka på 0,4 amp., vilket är tillräckligt för att få en god fart på elektrolysförsöken. Aggregatet kopplas med en sladd direkt till ljusledningen på 220 volt. (Lampor tillverkas även för andra spänningar.) På grund av den höga spänningen går elektrolysen med denna apparat betydligt bättre än med ett mindre

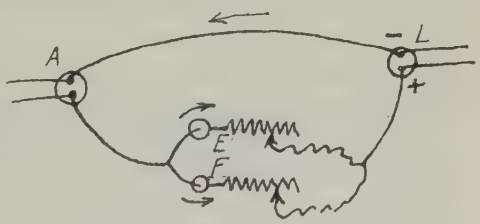


Fig. 1.

ackumulatorbatteri. Vid sådana fysiska experiment, till vilka kräves större strömstyrka, kommer den emellertid till korta. Där är ackumulatorbatteriet överlägset. Vid sådana mindre läroverk och kommunala mellanskolor etc., där man ej har råd att skaffa sig en roterande omformare (motorgenerator) med instrumentkopplingstavla, vilket under alla omständigheter annars torde vara det bästa, kan man alltså någorlunda reda sig med ett ackumalatorbatteri jämte ett glimljuslikriktaraggregat av nyss nämnt slag. Man har då

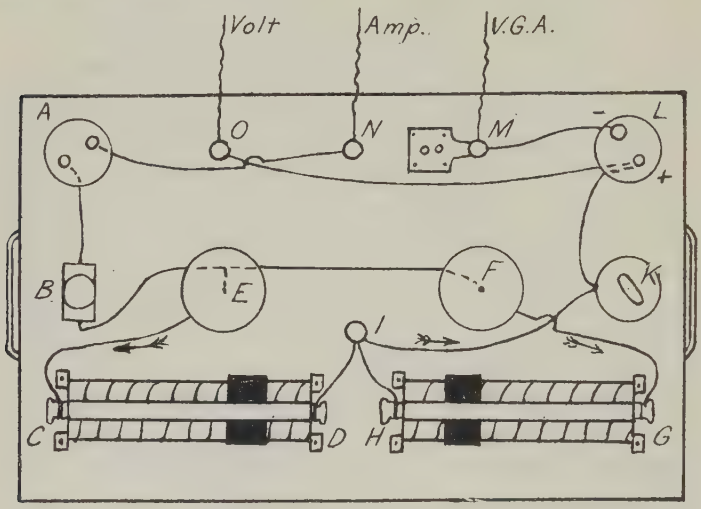


Fig. 2.

även den fördelen, att man medelst likriktaraggregatet själv kan ladda sitt ackumulatorbatteri och alltså ständigt hålla detta väl uppladdat.

Den praktiska utföringsformen av aggregatet visas på fig. 2. Apparaterna äro uppmonterade på en träplatta, som förses med handtag vid båda ändarna som en bricka. Vid kontaktbrickan *A* insläppes växelströmmen genom en sladd från ljusledningen. *B* är en säkerhetspropp för 0,4 amp., *E* och *F* de båda likriktarlamporna samt *CD* och *HG* de båda glidmotstånden. När strömmen påsläppes, bör man ha hela motståndet inkopplat. Glidkontakterna stå då vid *D* och *H*.

Sedan strömmen påsläppts, flyttas glidkontakterna utåt, tills den önskade strömstyrkan uppnåtts. De båda grenledningarna mötas åter vid *I*. *K* är en strömbrytarknapp. Vid kontaktsbrickan *L* uttages likströmmen. Sladdens kontaktpropp bör här ha ett tjockare och ett smalare stift, så att sladdens poler aldrig bli ombytta. Strömstyrkan resp. spänningen kan, om så önskas, bekvämt mätas från knapparna *M*, *N* och *O*, vilka äro så ställda, att de svara mot knapparna på den universal-demonstrationsgalvanometer, som står beskriven under n:r 8175 i Rudolph Graves katalog n:r 5 över fysikaliska apparater. Vid knapparna äro fästade korta, särskilt för ändamålet gjorda, böjliga trådar, slutande i mässingsstift. När spänningen mätes (mellan *M* och *O*), måste den fria ändan av sladden från knappen *N* stickas ned i ett hål i mässingsbrickan vid knappen *M*, så att huvudströmmen är sluten. När däremot sladden vid *O* ej är tillkopplad till voltmetern, stickes dess fria ända lämpligen ned i ett hål i träplattan bredvid knappen *O*. Självfallet kunna vilka mätinstrument som helst komma till användning. Dock vore det naturligtvis bäst med en voltmeter upp till 220 volt. Vid användning av den nyss nämnda voltmetern (Graves n:r 8175), som endast går upp till 10 volt, måste man vara säker på, att spänningen icke överskrider detta belopp, om voltmetern skall tillkopplas. *Särskilt måste man komma ihåg att icke, medan denna voltmeter är tillkopplad, avbryta strömmen genom att t. ex. urtaga proppen vid L, ty då kommer hela spänningen att ligga på voltmetern.* Däremot kan man utan risk avbryta strömmen genom strömbrytarknappen *K* eller genom att urtaga proppen vid *A* eller släcka en eller båda lamporna, antingen genom att skruva loss dem något eller genom att vrida på strömbrytarna på lamphållarna, om dessa äro försedda med sådana. I alla dessa fall urkopplas nämligen voltmetern samtidigt.

Skall likriktaraggregatet endast användas till laddning av radio- eller automobilackumulatorer, kan det betydligt förenklas. Det behöver då endast innehålla de båda lik-

riktarlamporna och de båda glidmotstånden, en kontaktbricka för tillkoppling av sladden från ljusledningen samt ett par oisolerade klämskruvar, från vilka likströmmen uttages. Dessutom helst en säkerhetspropp för 0,4 amp. Se fig. 3. Någon särskild strömmätare behövs icke, utan

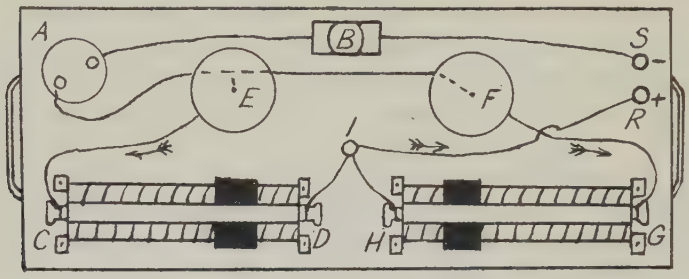


Fig. 3.

man låter strömmen bli så stark, att man nätt och jämnt kan hålla om lamporna med handen utan att bränna sig. Man bör åter prova detta, sedan lamporna brunnit ett par minuter, ty strömstyrkan sjunker något under uppvärmningen i början, så att efter ett par minuter kan ännu något mera av glidmotstånden urkopplas. Laddningsspänningen kan mätas genom att trycka en liten fickvoltmeter (t. ex. av typ n:r 8260 eller liknande, Graves katalog n:r 5) direkt mot klämskruvarna vid likströmsuttaget. — Båda de ovan beskrivna aggregaten tillverkas och försäljas hos firman Rudolph Grave, Stockholm.

Askersunds samskola d. $^{16}/_{3}$ 1926.

Om tonskalor.

Av C. A. SCHULTZ-STEINHEIL.

Då man i fysiken vill behandla tonskalor, är det enligt min mening nödvändigt att införa intervallet *komma* $= \frac{81}{80}$ för att vinna full klarhet.

Vill man utan att vara musikaliskt bildad skriva upp en durskala med en viss grundton, har man att som vanligt från grundtonen gå först två hela tonsteg, så ett halft, därefter tre hela och slutligen ett halft. Man vet då emellertid ej med säkerhet, att skalan är riktig, men man får en god kontroll genom att beräkna intervallen i förhållande till grundtonen och skall då få: antingen den rena c-durskalans intervall eller ock en skala, där något eller några intervall skilja sig från c-dur på *exakt* ett komma. Känner man ej intervallet *komma*, kan man således ej avgöra, om den uppskrivna skalan är riktig.

Exempel:

c-dur: c d e f g a h $\overline{\text{c}}$
1 $^{9}/_{8}$ $^{5}/_{4}$ $^{4}/_{3}$ $^{3}/_{2}$ $^{5}/_{3}$ $^{15}/_{8}$ 2.

e-dur: e fiss giss a h $\overline{\text{ciss}}$ $\overline{\text{diss}}$ $\overline{\text{e}}$
1 $^{10}/_{9}$ $^{5}/_{4}$ $^{4}/_{3}$ $^{3}/_{2}$ $^{5}/_{3}$ $^{15}/_{8}$ 2;
här är sekunden ett komma lägre än i c-dur.

fiss-dur: fiss giss ais h $\overline{\text{ciss}}$ $\overline{\overline{\text{diss}}}$ $\overline{\text{eis}}$ fiss
1 $^{9}/_{8}$ $^{5}/_{4}$ $^{27}/_{20}$ $^{3}/_{2}$ $^{27}/_{16}$ $^{15}/_{8}$ 2;
här äro kvarten och sexten ett komma för höga.

b-dur: b c d ess f g a b
1 $^{10}/_{9}$ $^{5}/_{4}$ $^{4}/_{3}$ $^{40}/_{27}$ $^{5}/_{3}$ $^{50}/_{27}$ 2;
här äro kvinten och septiman ett komma för låga.

I fiss-dur kunde man för övrigt vara böjd att i stället för eis sätta f, vilket dock är oriktigt.

Då Moll i sin lärobok i ett ex. (14) uppräknar hela tonserier med inskjutna halvtoner i en oktav, hoppar han över fess, eis, cess och hiss; enligt hans skala skulle en ton sådan som eis ej finnas. Septiman till fiss, som heter eis, har intervallet $\frac{15}{8}$, men intervallet mellan f och fiss är $\frac{48}{25}$; således är det betydligt mer än ett komma mellan tonerna eis och f. De äro alltså fullt skilda och ha därför olika namn, under det att två toner, som skilja sig från varandra på ett komma, ha samma namn och äro att betrakta som samma ton.

Anm. till uppsatsen Om tonskalor.

En fiolspelare, som har möjlighet att vid sitt spel skilja på t. ex. eis och f, måste starkt känna bristen i den vanliga behandlingen av tonskalan. För en pianospelare, som är hänvisad till endast 12 toner på oktaven, ligger följande framställning nära till hands.

En pianist måste kunna spela skalan med vilken ton på pianot som helst till grundton. Tersen till e är då giss och tersen till giss c. Är c:s svängningstal n, så skulle e:s vara $\frac{5}{4}n$, giss $\left(\frac{5}{4}\right)^2 n$ och c:s $\left(\frac{5}{4}\right)^3 n = \frac{125}{64}n$ i stället för $\frac{128}{64}n$. Härav framgår på enkelt sätt ofullkomligheten hos ett instrument med endast 12 toner på varje oktav och nödvändigheten att stämma terserna orena, då örat kräver, att oktaverna äro rena, men kan vänjas vid sådana terser, som man får vid liksvävande temperatur. Kompletteras detta

påpekande med att låta eleverna beräkna förhållandet mellan en ren kvint och en kvint i skalan med liksvävande temperatur samt med att låta dem på skolans piano höra svävningarna, då en kvint eller kvart anslås, torde tiden i allmänhet ej tillåta ett djupare ingående på ifrågavarande problem (jfr h. 2, sid. 100, årg. 1924—25 av denna tidskrift).

O. G—r.

En enkel apparat för att påvisa kolsyra.

Av **G. STARCK.**

Provet på kolsyra med kalkvatten kan stundom erbjuda besvärligheter. Om vid tillsats av syra en färg- och luktlös gas utvecklas, kan man i gasen nedföra en i kalkvatten doppad glasstav, en icke vidare tillförlitlig metod, ej heller lämpad för demonstration. I allmänhet torde man få lov att upprepa försöket, men nu i någon apparat, som medgiver gasens ledande genom kalkvatten.

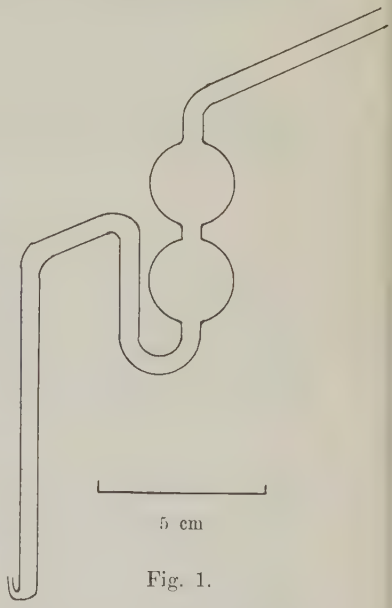


Fig. 1.

Det i fig. 1 avbildade röret, som ej behöver någon närmare beskrivning, medgiver direkt prövning på CO_2 i en gas, vilken som helst (med nedan nämnda undantag), varvid den prövade gasen kan befinna sig i en kolv, en öppen bägare eller ett provrör. Det fylles med klart kalkvatten genom sugning i den övre mynningen, som lämpligen förses med en ligatur, till halva den undre kulan. Det lodräta röret föres ned i den gas, som skall prövas, varpå man ånyo suger i den övre mynningen.

Här nedan anges några fall, då man snabbt och bekvämt kan demonstrera kolsyras bildning:

Karbonat + syra (bägare eller provrör);
karbonat + kaliumbisulfat (kolsyreprov på torra vägen i provrör);

dissociationen av natrium- och ammoniumbikarbonat, kalciumkarbonat (provrör, i sista fallet svårsmält);
kolsyreutveckling, då magnesium-, zink-, ferri-, krom- och aluminiumsalter fällas med soda (bägare);
utveckling av CO_2 vid upphettning av soda med kvarts (svårsmält provrör);
förbränning av kol i smält salpeter (provrör);
vatten, varigenom man lett CO_2, avger vid uppvärmning gasblåsor, som grumla kalkvattnet; CO_2 är således lösligt i vatten (bägare);
o. s. v.

Den risk, som giftiga gaser kunna tänkas medföra, elimineras, om man suger med vattensugen eller gummiboll. Man kan för övrigt mycket väl suga in ganska mycket luft utan att taga in den i lungorna och åter blåsa ut den.

De undantag, som ovan nämndes, äro starkt sura gasblandningar. Kalkvattnet kan visserligen göras starkt basiskt med natronlut, men denna måste då vara karbonatfri, vilket sällan är fallet med förrådslösningar. Med enbart kalkvatten kan man sålunda ej påvisa CO_2-bildning, då kol får brinna på salpetersyra.

Till redaktionen insända böcker.

Tor J. V. Lindblad, *Lärobok i matematik* för kommunala mellanskolor, högre folkskolor m. fl. läroanstalter, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1926. 148 sid. Kr. 3: 75.

Denna lärobok är, som titeln anger, avsedd huvudsakligast för kommunala mellanskolor och högre folkskolor men torde också rätt bra lämpa sig för realskolan. Den inledes med en aritmetisk del i form av en repetitionskurs av bråk jämte tillämpningsövningar. Hade boken börjat med några sidor, innehållande en fullständig framställning av läran om bråks division, vilket i allmänhet ej medhinnes i realskolans andra klass, skulle denna bok varit fullt tillräcklig för aritmetiken och algebran i realskolan från och med tredje klassen. Efter den aritmetiska delen följer algebra och ekvationslära med de vanliga tillämpningarna. Som bokens svagare parti finner anm. kap. »Grafisk lösning»: En väl abstrakt inledning och en följande framställning, som bygger på att läsaren förut vet, att vissa funktioner (t. ex. första grads funktionen och ledningsmotståndets beroende av temperaturen) äro lineära funktioner. Boken avslutas med en avdelning planimetriska och stereometriska eller, som förf. kallar dem, geometriska problem samt ett kapitel blandade exempel.

Förf. inleder de olika kapitlen med abstrakta resonemang och härledningar och tillämpar sedan resultaten på konkreta exempel. Detta hindrar ju icke läraren att vid undervisningen börja med sifferexempel och således följa en pedagogikens »gyllene regel»: från det konkreta till det abstrakta. Redan i ett annat sammanhang har anm. haft tillfälle påtala det olämpliga med bokstavsexponenter och allmänna lagar, så länge det gäller räkning med potenser,

där exponenterna äro hela positiva tal. Förf:s framställning av dignitetläran störes av ett olyckligt försök att bevisa att $a^0 = 1$.

Bokens största förtjänst enligt anm:s mening är den rikhaltiga samlingen av exempel, en del mycket goda, ehuru det kanske icke hade skadat med flera av enklare slag. Så tyckes det, som om förf. i ekvationsläran väl fort kommer in på ekvationer med nämnare. *Hj O.*

Frits Wigforss *Den grundläggande matematikundervisningen*, översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt, Magn. Bergvalls förlag, 1925. 127 sid. Häft. kr. 3: —.

Lektor Frits Wigforss' metodiska översikt av den första undervisningen i räkning och geometri är närmast avsedd att vara en handledning för lärare och lärarinnor vid våra små- och folkskolor. Emellertid torde den ur många synpunkter förträffliga framställningen ej sakna sitt intresse även för lärare i matematik vid sådana skolor — realskolor, mellanskolor etc. —, där ämnets allra första elementer skola vara undangjorda och där man har att bygga vidare på en i lägre skolformer lagd grund. Och åtminstone ännu så länge läsas i realskolans lägsta klasser kurser, som delvis sammanfalla med dem, som genomgås i folkskolans högsta och vilkas metodik avhandlas i Wigforss' bok. Visserligen är då att anmärka, att vissa modifikationer i de angivna metoderna torde vara behövliga med hänsyn till det vidare och på längre sikt ställda mål, som matematikundervisningen har vid de allmänna läroverken i förhållande till vid folkskolan.

I bokens första avdelning upptar förf. till diskussion några allmänna krav på undervisningen i matematik, anger några synpunkter på räkneuppgifternas beskaffenhet och sakinnehåll och avhandlar den viktiga frågan om skriftlig och muntlig räkning. Förf. har här tillfälle att säga många förståndiga saker, som det för varje lärare, oberoende av vilket stadium det gäller, kan vara nyttigt att taga del av,

och även om man på en del punkter kan ha att anmäla en avvikande mening, ger läsandet av förf:s framställning anledning till överväganden, som kunna verka befruktande på ens undervisning.

I följande avdelning upptages till detaljerad granskning frågan om de hela talens och bråkens inlärande samt de fyra räknesätten med sådana tal. Grundtemat i förf:s framställning är, att undervisningen göres i möjligaste grad åskådlig och naturlig och att lärjungarna tvingas att *begripa* de olika räkneoperationerna, medan *mekanisering* bör inskränkas till det nödvändigaste. Medan lärjungarna ju till slut få lov att säkert mekaniskt behärska de fyra räknesätten med hela tal, är det, anser förf., inom bråklära man har att skjuta det mekaniska kunnandet mer i bakgrunden och låta förståndsarbetet dominera. Detta gäller också i viss grad enligt anm:s mening den »högre» skolan, även om man där till slut måste hålla på mekanisk räknefärdighet med bråk. Regler kan man spara med rätt länge, tills lärjungarna själva genom erfarenheten utbildat dem. Som exempel kan nämnas bråks förlängning. Om $\frac{3}{4}$ skall förvandlas till 24-delar, låter man detta länge ske genom resonemang: En hel = 24 tjugofjärdedelar, $\frac{1}{4}$ således 6 och $\frac{3}{4} = \frac{18}{24}$. Lärjungarna få själva så småningom upptäcka, att täljare och nämnare kunna multipliceras med samma tal, utan att bråkets värde förändras, och på detta naturliga sätt utbilda regeln. Genom de varje lektion återkommande övningarna i huvudräkning har man sedan goda tillfällen att vidmakthålla *förståendet* av de mekaniska regler, som lärjungarna sedan vid sina räkningar använda.

Förf. låter decimalbråkräkningen införas som ett specialfall av vanliga bråk. Anm. föredrar att införa decimalbråken genom en naturlig utvidgning av positionssystemet, sedan lärjungarna lärt känna själva bråkbegreppet. Detta begrepp kan ges på ett mycket tidigt stadium, och vid inlärandet av sorterna brukar man ju ej underlåta att lära barnen, att *deci* betyder *tiondel* o. s. v. Som inledning till inlärande av decimalbråken låter man lärjungarna på olika

sätt utläsa t. ex. 3786 mm: 3 hela m, 7 tiondels m, 8 hundradels m, 6 tusendels m eller 37 dm, 8 tiondels dm, 6 hundradels dm o. s. v.

Efter en intressant och lärorik avdelning om inövningsarbetet ägnar förf. ett särskilt kapitel åt problemlösningen: regula de tri, procent- och ränteuppgifter m. m. Även här har förf. rika tillfällen att varna för mekanisering och schablonmässighet. I en sista avdelning behandlas folkskolans kurs i geometri. *Hj. O.*

E. Hubendick och T. Lindmark, *Uppfinningarnas bok II, Brännmaterialier, värmemotorer och kompressormaskiner*, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1925. 1 072 sid., 1 556 illustr., excl. ett antal porträtt. Klotband kr. 35: —, halvfr. kr. 40: —.

Detta stort anlagda verk har till författare framstående experter på var sitt område, som framgår av följande översikt av innehållet: Professorn vid Tekniska Högskolan E. Hubendick inleder med ett kapitel om bränslen samt avhandlar varmluftsmaskinen, förbränningsmotorn, blåsmaskiner, luftpumpar och kompressorer samt de låga temperaturernas teknik. T. Lindmark, likaledes professor vid samma högskola, lämnar en framställning av ångmaskinteknikens utveckling intill våra dagar samt redogör för ångpannor, ångturbiner, kondensorer, kylverk och ånganläggningar. Ett särskilt kap. ägnar han åt återblick, framtidsutsikter och svenska insatser. Avdelningschefen vid Bergsunds mek. verkstad G. Dahlby redogör för kolvångmaskiner och förste byråingenjören vid statens järnvägar C. Flodin för ånglokomotivet.

Denna andra del av Uppfinningarnas bok skiljer sig från vanliga maskinläror dels därigenom att mycken plats beretts åt uppfinningarnas historia dels därigenom att nästan allt utelämnats, som rör beräkning av maskinernas dimensioner för att de skola kunna utveckla en viss effekt, deras drivaxlar normalt rotera med en uppgiven hastighet, deras alla delar få riktig hållfasthet etc. De få ställen, där mate-

matiska formler — givna utan härledning — förekomma, kunna förbigås utan att sammanhanget störes.

Såsom en särskild förtjänst hos boken må framhållas, att dess författare på flera ställen låta läsaren få del av uppfinnarnas svårigheter, deras ihärdiga kamp för att nå ett föresatt mål och deras glädje över äntligen vunnen seger.

För att med behållning kunna läsa boken kräves blott kännedom om värmelärans elementer samt någon övning i att uppfatta en funktion av en variabel medelst dess kurva.

Det är en mycket svår uppgift att bland det oerhörda material, som stått författarna till buds, utvälja det lämpligaste. I stort sett synes mig denna uppgift väl löst, men anmärkningar i detta avseende är det naturligtvis lätt att framställa. Så t. ex. torde ej inledningskapitlet på 180 sidor om bränslen kunna påräkna allmännare intresse. I detta kapitel redogöres för alla möjliga undersökningar över jordens energikällor, och trots den bredd, varmed ämnet där behandlas, har dess förf. återkommit till bränslefrågan i slutet av boken med en avhandling på ett 10-tal sidor. Ett annat exempel på onödig bredd är redogörelsen för gamla blåsbälgar och fläktar. Däremot synes mig ljuddämparen vid förbränningsmotorer förtjänt av närmare behandling.

De olika författarna ha i allmänhet ej vållat tautologier genom att upprepa något, som redan behandlats av en annan av dem. För den, som läser boken i sin helhet, skulle det dock varit önskvärt, om förf. till avdelningen om ånglokomotivet tagit mer hänsyn till prof. Lindmarks behandling av ångtekniken i allmänhet. En del avkortningar skulle då utan olägenhet kunnat göras. Men för den, som blott vill läsa ifrågavarande avdelning, är det givetvis bra som det är.

Av det sagda torde framgå, att boken är fullt elementär. Om en professor, som är van att vända sig till studenter, vilka vid Tekniska Högskolan redan fått avsevärd utbildning, en och annan gång använder en term, som ej ingår

i dagligt tal, eller om han utan närmare förklaring hänvisar till en relativt svårläst figur för att kort beskriva en sak, må det vara honom förlåtet, och dylika fel vid populärvetenskapligt författande kunna sporra intresserade läsare att använda även andra böcker för att komplettera sitt vetande.

Såsom prov på att även den tränade föreläsaren och vetenskaplige författaren kan göra sig skyldig till felaktig användning av en fackterm, då han skall uttrycka sig populärt, må anföras, att å sid. 183 står arbetsenhet i stället för effektenhet och å sid. 367 amalgamering i stället för legering.

Några anmärkningar mot det rent formella kunna här ej helt utelämnas. Dessa äro dock ej riktade mot någon av författarna; hur skulle man väl kunna begära, att en professor som har tung tjänsteplikt och vid sidan av denna utövar omfattande författarskap, andra åligganden att förtiga, skulle ha tid att fästa stort avseende vid det formella. Den, som nästan aldrig har tid att läsa svensk litteratur, får sitt öra för svenskan förslöat och märker således ej, om han använder germanismer. Såsom prov på dylika må anföras: »försmutsa» i stället för smutsa ned (sid. 711, 857), »ansmyga» i stället för att smyga sig intill (sid. 932) och en del osvenska participialkonstruktioner. Den, som på sena natten skrivit följande fras: »Skälen till kurvans form ligga i konstruktiva detaljer och dimensioneringsspörsmål», märker svårligen vid en hastig korrekturläsning det ologiska i formuleringen.

Enligt undertecknads mening borde ifrågavarande bok finnas i varje gymnasiums skolbibliotek, då ej blott tekniskt intresserade gymnasister, som genomgått värmeläran, utan även deras fysiklärare skulle ha stor nytta och glädje av att läsa boken mer eller mindre fullständigt; ja, även lärarna i svenska skulle ha nytta därav. Med hänvisning till denna bok kunna de giva sina elever lämpliga ämnen till föredrag i skolan. Det är ej svårt att finna sådana, både referat av större kapitel, beskrivning av aktuella anord-

ningar, sammanställningar från bokens olika kapitel etc. Såsom prov på dylika ämnen må anföras: Watts insatser i ångmaskinens, Diesels i förbränningsmotorns utveckling, jämförelse mellan slid- och ventilreglering av ångmaskiner, Platen-Muntes kylmaskin, betydelsen av ordet »compound» vid ångmaskinen och förbränningsmotorn — och varför ej tillägga vid elektriska generatorer, fast dessa ej behandlas i föreliggande arbete. *O. G—r*

Nils Löfman och Torsten Pehrson, *Kemiska räkneuppgifter jämte anvisningar för deras behandling*, 2:a uppl., P. A. Norstedt & Söners förlag, 1926. 71 sid. Häft. kr. 2: 50.

En imponerande samling av 405 uppgifter, fördelade på 9 kapitel, med svar och anvisningar. Det är sålunda ett synnerligen rikt material, som här ställes till gymnasielärarens förfogande, och man frågar sig, om det icke rent av är för rikt. En del grupper synas ur synpunkten av räknemetodernas inlärande överfyllda med ensartade exempel, t. ex. »procentisk sammansättning». Den, som kan beräkna den procentiska sammansättningen av *en* kemisk förening, kan givetvis också beräkna sammansättningen av alla andra föreningar, under förutsättning, att han känner deras formler. Man torde icke misstaga sig, om man antager, att författarna med detta överflöd av exempel avsett ett större mål än den tämligen begränsade, rent räknemässiga färdigheten, nämligen meddelandet och befästandet av ett ganska rikt mått av kemiska kunskaper. Det gäller då att undvika, vad L. Ramberg på ett ställe säger alltför mycket utmärka läroböckernas övningsexempel: tom konstruktion ad hoc. Författarna hava i de flesta fall lyckats undvika denna fara, dock icke överallt. Som exempel må nämnas uppgifter av typen 236, där det gäller att uppställa reaktionsformeln för zinks upplösning i salpetersyra, om därvid bildas kvävoxidul, kvävoxid och kvävetetroxid(?) i volymsförhållandet 5 : 3 : 7. Jag tror, att även en van gasanalytiker skulle betänka sig två gånger, innan han toge itu med en analys av denna gasblandning, och sannolikheten för att

erhålla ovanstående enkla siffror förefaller minimal, varjämte kvävetetroxid utan kvävedioxid synes vara en tämligen apokryfisk reaktionsprodukt. Men, som sagt, dylika exempel äro undantag. Ett exempel av typen 245: angiv formeln för den malm, som består av 40 % svavel och resten järn, vill jag däremot icke beteckna som konstruerat, emedan det är omvändningen av en faktiskt förekommande beräkning, nämligen av »det enligt en viss formel beräknade värdet». Men däremot bör det på ett högre stadium kompletteras av följande uppgift: så och så många g av ett mineral gåvo efter uppslutning o. s. v. så och så många g järnoxid och så och så många g bariumsulfat, beräkna formeln. Överhuvudtaget skulle den redan mycket förtjänstfulla samlingen vinna ännu mer i värde genom en minskning av de allra elementäraste problemens antal och en motsvarande ökning av de svårares, särskilt de fysikaliskt-kemiska exemplens. I motsats mot författarna anser rec., att massverkans lag mycket väl lämpar sig för en osökt kvantitativ behandling, och att en sådan t. o. m. är särdeles önskvärd, för att denna lag skall vinna full förståelse.

Den nya upplagan är underkastad en grundlig revision och i sitt nuvarande skick en avgjord vinst för vår kemiska övningslitteratur. *G. S.*

Ludwig Ramberg, *Syra, bas och salt*, en blick på gamla och nya föreställningar och teorier, Uppsala universitets årsskrift 1925, Lundequistska bokhandeln, Uppsala. 74 sid. Häft. kr. 2: 50.

Denna överblick över hur åsikterna om syror och baser växlat under ett och ett halvt sekel eller så lång tid, som man räknar med en vetenskaplig kemi, äro av största intresse för alla, som undervisa i detta ämne. I ett av utomordentlig klarhet kännetecknat första kapitel lämnas en redogörelse för den ganska förvirrade utvecklingen fram till dissociationsteorien. Arrhenii storverk får sin tillbörliga uppskattning, och som avslutning på detta kapitel refereras

de nya, med namnen Bjerrum och Lewis förbundna åsikterna om de starka elektrolyternas dissociation. De starka elektrolyterna hava alltid, för att använda Arrhenii egna ord, varit dissociationsteoriens sorgebarn. De svårigheter, de bereda diss.-teorien, karakteriseras av författaren med följande ord: »Så snart det är fråga om lösningar, i vilka de fria jonernas koncentration överskrider en viss gräns, uppträda större eller mindre (men alltid med jonkoncentrationen stigande) avvikelser, då man använder de värden på dissociationsgraden (α), som erhållas ur ledningsförmågan (μ) medelst formeln $\alpha = {}^{\mu}/_{\mu_\infty}$, för beräkning av jämviktstillstånd, katalytisk effekt, elektromotorisk kraft (enligt Nernsts teori), osmotiskt tryck m. m. Så t. ex. följa starka syror ävensom salter åtminstone vid högre koncentrationer ej utspädningslagen, en syras katalytiska verkan ökas vid tillsats av neutrala salter o. s. v.» Den nya riktningen antager för dessa elektrolyter en fullständig jonisation och förklarar eller beskriver jonernas skenbara association till molekyler genom mellan jonerna verkande »interjoniska» krafter. Dessa krafter medföra, att vid ändlig utspädning icke alla jonerna göra sig gällande, vare sig vid elektricitetsledning eller i kemiska reaktioner, utan endast en del av dem, bestämd av vissa koefficienter, en identisk med den Arrhenius'ska diss.-graden $f_\mu = {}^{\mu}/_{\mu_\infty}$, en annan, »aktivitetskoefficienten» $f_a = {}^{a}/_{c}$, där c är jonens analytiska koncentration och a dess »aktiva» koncentration. I olikheten mellan dessa koefficienter, som enligt diss.-teorien borde vara lika, ligger den svårighet, som de starka elektrolyterna erbjuda. Det närmare studiet av dessa koefficienter, som redan givit viktiga resultat, kommer säkert att få mycket stor betydelse för kemiens närmaste utveckling.

I det tredje kapitlet behandlas Werner's koordinationsteori, i det fjärde — övervägande kritiskt — Hantzsch's pseudosyror och teorien om den jonogena bindningen.

Det femte och sista kapitlet, som för pedagoger bör vara av särskilt intresse, behandlar »definitionsfrågor». Förfat-

taren har kanske mer än andra svenska kemister som en brist uppfattat, »att knappast någon annan av de exakta vetenskaperna genomgående lagt så ringa vikt vid den kunskapsteoretiska analysen av sina fundamentalbegrepp som just kemien,» och i överensstämmelse härmed i »Grunddragen av den kemiska analysens teori» strävat efter skarpa motsägelselösa definitioner. De här berörda definitionsfrågorna gälla begreppen syra och bas. Författaren riktar här ett uddigt och säkert välmotiverat angrepp mot de pedagoger, som med järnhård konsekvens genomföra den »moderna» åsikten, att CO_2 ej är någon syra, men ej märkt, att tiden löpt förbi dem. För övrigt är den här givna redogörelsen för Werner's, Michaelis' och framför allt Brönsted's åsikter av det intresse, att ett med nödvändighet kortfattat referat icke skulle göra den någon rättvisa; den bör studeras i original.

Ingen kemilärare borde försumma att med ledning av professor Rambergs såväl formellt som ur innehållssynpunkt förträffliga, intressanta monografi kasta en blick tillbaka på utvecklingen och taga kännedom om den nuvarande ståndpunkten av ett i hans undervisning så grundläggande moment som läran om syror, baser och salter. *G. S.*

David Eugene Smith, *History of Mathematics, 2 vol. 1. General survey of the History of elementary Math. 2. Special Topics of elementary Math.*, Ginn and C:y, Boston, 1923 o. 1925. 596 sid. + 725 sid. $ 4 och $ 4: 40.

Olof Josephson, *Planimetri och likformighetslära*, Albert Bonniers förlag, 1926. 88 sid. Häft. kr. 1: 90.

J. S. Hedström, *Geometri*, samma förlag, 1926. 138 sid. Kr. 3: 25.

Ruben Mattson, *Lärobok i algebra för gymnasiet*, 3:e uppl., P. A. Norstedt & Söners förlag, 1925. 168 sid. + tabell. Kart. kr. 3: 90.

Anna Beckman, *Synligt och osynligt ljus, en populär framställning av den strålande energiens gåtor*, J. A. Lindblads förlag, 1926. 135 sid. Häft. kr. 3: 25.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

229) Att upprita en triangel, då man känner en vinkel, summan av de båda omfattande sidorna och den inskrivna cirkelns radie. *Iter.*

230) Att konstruera brännpunkterna till ett kägelsnitt, då man känner de linjer, som innehålla axlarna och två normaler. *X.*

231) Alla sidotrianglar i en tetraeder ha samma yta. Uttryck i en sådan triangels element

a) den omskrivna sfärens radie,

b) volymen,

c) höjden mot samma triangel.

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

232) Lös ekvationen

$$\left(\frac{0{,}7}{\sqrt{x}}\right)^{\log x} = \frac{1}{49}.$$

Svar: $x_1 = 0{,}01$; $x_2 = 49$.

233) Eliminera α ur systemet

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin\alpha + \cos\alpha \\ y &= \sin^3\alpha + \cos^3\alpha \end{aligned}\right\}.$$

Svar: $2y = 3x - x^3$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar godhetsfullt kunna insändas under adress: Högre reallläroverket å Östermalm, Stockholm.

234) Två cirklar med radierna R och r tangera varandra utantill. Huru stor är radien i den cirkel, som tangerar såväl cirklarna som deras gemensamma yttre tangent.

Svar: $\left(\frac{\sqrt{Rr}}{\sqrt{R}\pm\sqrt{r}}\right)^2$.

235) I ABC är $\angle A=30°$, $b=3272$ cm och bissektrisen till $\angle C$ 1687 cm. Beräkna $\angle C$.

Svar: $C_1=148°,2$, $C_2=91°,8$.

236) Sök toppvinkeln i en rät kon, i vilken en kub är inskriven på sådant sätt, att blott en kant ligger i basytan, men de övriga sex hörnen på manteln.

Svar: $54°,74$.

237) De tre linjerna $y=0$, $x+y=2$ och $y=kx+1$ bilda en triangel av $2\frac{1}{4}$ ytenheter. Sök härav värdet på k.

Svar: $k_1=1$, $k_2=-2$, $k_{3,4}=\frac{-17\pm3\sqrt{17}}{34}$.

Lösningar till uppg. 193—196.

193) *Visa, att om*

$$(xy+xz+yz)^3=xyz(x+y+z)^3,$$

så äro x, y, z *(i godtycklig ordning) i geometrisk progression.*

Anm. Ordet »godtycklig» bör ersättas med »lämplig» eller »någon».

Ekvationen

$$(xy+xz+yz)^3-xyz(x+y+z)^3=0$$

är identiskt satisfierad för $x^2=yz$ (såsom man genast finner, om produkten yz i båda termerna utbytes mot x^2). Uttrycket i vänstra membrum måste därför innehålla faktorn x^2-yz. Då uttrycket är symmetriskt med avseende å x, y, z, måste det av samma skäl innehålla faktorerna y^2-xz och z^2-xy, varför ekvationen måste kunna bringas under formen

$$(x^2-yz)(y^2-xz)(z^2-xy)=0.$$

Då nu en produkt ej kan vara $= 0$, utan att *minst en* av faktorerna är noll, inses omedelbart, att x, y, z måste vara, *i en eller annan ordning*, i geometrisk progression (ej nödvändigt i godtycklig ordning).

Geometriskt föreställer ekvationen tre kongruenta koniska ytor av andra graden, vilka skära varandra två och två utefter olika koordinataxlar och därjämte ha tre gemensamma skärningslinjer

$$x = \varepsilon y = \varepsilon^2 z ,$$

där $\varepsilon = \sqrt[3]{1}$. Endast på dessa tre för samtliga koner gemensamma skärningslinjer äro x, y, z i geometrisk progression *i godtycklig ordning.*

Iter.
Även löst av *H—r W* och *X.*

194) *I en regelbunden oktaeder lägges ett plan genom en av kanterna, så att det avskär en pyramid* $= \frac{1}{4}$ *av oktaederns volym. I vilka förhållanden delas de båda kanter, som planet skär?*

Vi betrakta följande något allmännare fall. I pyramiden $(O;\ A,\ B,\ C,\ D)$ är basytan $ABCD$ ett trapets, i vilket $AB = a$ är parallell med $CD = b$. Normalplanet genom O mot dessa sidor skär dem (eller deras förlängningar) i M och N resp. Då har man tydligen pyramidens volym

$$V = \tfrac{1}{3}(a+b) \cdot \triangle OMN \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Ett godtyckligt plan genom AB skär OC och OD i resp. C_1 och D_1. $C_1D_1 = b_1$ är då vinkelrät mot planet OMN och skär (ev. förlängd) detta i N_1.

För pyramiden $(O;\ A,\ B,\ C_1,\ D_1)$ gäller som nyss

$$V_1 = \tfrac{1}{3}(a+b_1) \cdot \triangle OMN_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1_1)$$

Vi fordra nu, att $V_1 = k \cdot V$, och antaga för den skull, att

$$\frac{OC_1}{OC} = \frac{OD_1}{OD} = \frac{ON_1}{ON} = x .$$

Då blir tydligen $b_1 = b \cdot x$; *dessutom är förhållandet mellan* $\triangle OMN_1$ *och* $\triangle OMN$ *även* x. Därav sluter man enligt (1)

och (1_1), att x är den positiva roten till

$$\frac{a+bx}{a+b}\cdot x=k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

I föreliggande uppgift har man att sätta $a=b$, $k=\frac{1}{2}$. Ekv. (2) kan då skrivas

$$x^2=1-x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

varav följer, att kanterna delas enligt »gyllene snittet», så att de större delarna tillhöra den avskurna pyramiden.

X.

Även löst av *Iter*.

195) *Att upprita en triangel, då* α, $b+c$ *samt den linje* m, *som förenar fotpunkterna av* h_b *och* h_c, *äro givna.*

Man observerar, att sidan a är diameter i en cirkel, i vilken en korda med längden m åt ena sidan upptar periferivinkeln $90°-\alpha_1$. a kan således konstrueras, och sedan är uppgiften den bekanta att konstruera en triangel, då a, α och $b+c$ äro givna. Möjlighetsvillkoret är

$$a<b+c\leqq\frac{a}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Då $a=\frac{m}{|\cos\alpha|}$, kan detta skrivas

$$b+c>\frac{m}{|\cos\alpha|}\geqq(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}.$$

X.

Även löst av *Iter*, *C* och *H—r W.*

196) *Om* $tg\,x\cdot tg\,y+\lambda^2=0$, *har*

$$\sqrt{(\cos x+\cos y)^2+\lambda^2(\sin x+\sin y)^2}+$$
$$+\sqrt{(\cos x-\cos y)^2+\lambda^2(\sin x-\sin y)^2}$$

ett konstant värde. Vilket?

1. Algebraisk lösning.

Uttrycken under rotmärkena kunna skrivas under formen

$$u\pm v,$$

där

$$u=\cos^2x+\cos^2y+\lambda^2(\sin^2x+\sin^2y),$$
$$v=2(\cos x\ \cos y+\lambda^2\sin x\ \sin y).$$

Mellan x och y har man relationen

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \lambda^2 = 0,$$

vilken kan skrivas under formen

$$\sin x \sin y + \lambda^2 \cos x \cos y = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Överflyttas sista termen till högra membrum, erhålles genom kvadrering

$$\sin^2 x \sin^2 y = (1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 y) = \lambda^4 \cos^2 x \cos^2 y,$$

varav

$$\cos^2 x + \cos^2 y = 1 + (1 - \lambda^4) \cos^2 x \cos^2 y,$$

$$\sin^2 x + \sin^2 y = 1 - (1 - \lambda^4) \cos x \cos^2 y,$$

$$u = (1 + \lambda^2)[1 + (1 - \lambda^2)^2 \cos^2 x \cos^2 y],$$

$$v = 2(1 - \lambda^4) \cos x \cos y,$$

$$u \pm v = (1 + \lambda^2)[1 \pm (1 - \lambda^2) \cos x \cos y]^2. \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Uttrycken under rotmärkena ha nu bragts under sådan form, att rötterna kunna utdragas. För att med säkerhet erhålla de *positiva* rötterna fordras emellertid en särskild undersökning.

Av (1) framgår, att mot ett maximum resp. minimum för $\cos x \cos y$ svarar ett minimum resp. maximum för $\sin x \sin y$. Då har även

$$\cos x \cos y - \sin x \sin y = \cos(x + y)$$

ett extremum. Men sistnämnda uttryck har ett *absolut extremum* $= \pm 1$ för $y = -x + k\pi$, ett extremum, som med fasthållande av det givna sambandet mellan x och y verkligen uppträder för $\operatorname{tg}^2 x = \lambda^2$. Då är

$$|\cos x \cos y| = \cos^2 x = \frac{1}{1 + \lambda^2},$$

och således, för *godtyckliga* värden på x,

$$\left|(1 - \lambda^2) \cos x \cos y\right| \leqq \frac{|1 - \lambda^2|}{1 + \lambda^2} < 1 \text{ för } \lambda \neq 0.$$

De positiva rötterna äro således enligt (2)

$$\sqrt{1+\lambda^2}\,[1 \pm (1-\lambda^2)\cos x \cos y].$$

Deras summa är

$$s = 2\sqrt{1+\lambda^2}.$$

2. Geometrisk lösning.

Om vi i ellipsen

$$\begin{cases} x = \cos u, \\ y = \lambda \sin u, \end{cases}$$

där u är den excentriska anomalien, förena två diametralt motsatta punkter $P(\varphi)$ och $P'(\varphi+\pi)$ med en punkt $Q(\psi)$, så är det givna rotuttrycket, vari vi tänka oss x, y utbytta mot φ, ψ, den analytiska expressionen för summan av dessa supplementarkordors längder. Ekvationerna för tangenterna i P och Q äro

$$x\cos\varphi + \frac{y}{\lambda}\cdot\sin\varphi - 1 = 0,$$

$$x\cos\psi + \frac{y}{\lambda}\cdot\sin\psi - 1 = 0.$$

Är nu

$$\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{tg}\psi = -\lambda^2,$$

så är produkten av tangenternas vinkelkoefficienter

$$kk' = \left(-\frac{\lambda}{\operatorname{tg}\varphi}\right)\cdot\left(-\frac{\lambda}{\operatorname{tg}\psi}\right) = -1$$

och tangenterna således vinkelräta mot varandra. Punkterna P, P', Q utgöra således kontaktpunkter för en kring ellipsen omskriven rektangel. Dennas diagonaler halvera var sin av de båda supplementarkordorna, vilka således äro parallella med var sin av nämnda diagonaler, varav följer, att PQ och $P'Q$ bilda lika vinklar med tangenten i Q. Tänka vi oss då en ellips uppritad med P och P' till brännpunkter och gående genom Q, så är tangenten i Q till den

fasta ellipsen en gemensam tangent till båda ellipserna. Enligt bekanta teorem måste då principalcirkeln till ellipsen med brännpunkterna P och P' sammanfalla med den *mongeska* cirkeln till den fasta ellipsen, och man har således

$$PQ + P'Q = 2\sqrt{1 + \lambda^2}.$$

Iter.
Även löst av *C.*

OTTO GALLANDER

†

Oväntat nådde oss och smärtsamt berörde oss budet om Otto Gallanders bortgång. Han stod mitt uppe i sitt arbete, fylld av idéer och verksamhetslust. Ännu i detta häfte föreligger en uppsats av hans hand.

För denna tidskrift var Gallander ett starkt och bärande stöd; hans frånfälle innebär därför en svårersättlig förlust. Han var med alltifrån början såsom chef för dess fysiska avdelning, och han ägnade under de gångna nio åren tid-

skriften ett hängivet och oförtröttat arbete, som icke kunnat undgå att lämna djupa spår efter sig. Han offrade villigt tid och kraft för densamma; själv har han författat en mångfald uppsatser, många ha genom hans påverkan sett dagen, ha granskats och förbättrats av honom. Att en litteratur lever visar sig däri, att den sätter problem under debatt, och detta gäller icke minst facklitteratur. Gallander var en aktiv man; elden i hans inre var ständigt brinnande. Han ville bidraga till att föra sin vetenskap framåt, han ville göra sina läsare förtrogna med tidens problemställningar, ville hålla deras intressen uppe och tvinga till eftertanke; han ville giva och lära dem något, varigenom de skulle bli dugligare och kunnigare i sitt kall. Gallander var aldrig rädd för att framlägga sina synpunkter och kämpa för dem. Men han var icke en söndringens man utan en samförståndets och den goda viljans. Hans positiva läggning gjorde honom dubbelt värdefull icke minst i en tid och inom en kår som vår.

Såsom ungdomslärare kunde Gallander genom sin entusiasm och det starka personliga intresse han nedlade i sitt arbete icke undgå att vinna ungdomen och rycka den med sig. Han sökte omsätta Goethes ord: »Was fruchtbar ist, allein ist wahr» genom att göra sina elever förtrogna med fysikens praktiska tillämpningar. I sina läroböcker och i sin undervisning eftersträvade han att slå bryggor mellan skolan och livet. Måhända var hans senaste verksamhetsfält (vid ett latinläroverk) ej så väl lämpat för honom med hans starka inriktning på fysiken och dess praktiska studium. Och ofta talade han — ej utan saknad — om den tid han tillbragt i Örebro vid dess tekniska elementarskola. Här hade han nedlagt en betydande del av sitt livsverk; det är välbekant, att han gjorde dess fy-

siska institution till ett mönster i sitt slag. Härtill bidrog bl. a., att han genom sin förmåga att taga folk skapade mecenater, vilka offrade betydande belopp till inköp av apparater och dylikt.

Ingen, som kände Gallander närmare, kunde misstaga sig på grundtonen i hans väsen, anspråkslöshet, öppenhet och hjärtegodhet. Han var livlig och varmhjärtad, han blev lätt entusiasmerad och hade vittomspännande intressen, han var en glad, trofast och tillgiven vän. Också skola hans många vänner med saknad och tacksamhet bevara hans minne.

H—m.

Om vinkelns tredelning och kubens fördubbling.

Av ELOF NORÉN.

Problemen att dela en given godtycklig vinkel i tre lika stora delar och att konstruera kanten i en kub, vars volym är två gånger en given kubs volym, kunna som bekant ej lösas blott med passare och linjal. Med hjälp av andra kurvor äro problemen dock lätt lösta, och redan greken NICOMEDES lyckades, omkr. år 180 f. Kr., med hjälp av konkoiden att dela en vinkel i tre lika stora delar. ARCHIMEDES överförde problemet angående vinkelns tredelning till problemet att i en given cirkel konstruera en korda, så att den del av kordans förlängning, som ligger emellan cirkelperiferien och en given diameters förlängning, blir lika med radien. Idén har utbildats av fransmannen VIETA (omkr. år 1590), och den praktiska lösningen blir en samtidig vridning och förskjutning av en linjal, som stödes mot den sökta kordans ena ändpunkt, varvid en fix punkt på linjalen kommer att beskriva en konkoidgren, vars skärning med den givna vinkeln ger kordans andra ändpunkt. Angående kubens fördubbling fann HIPPOKRATES från Chios omkr. år 460 f. Kr., att problemet är identiskt med att finna två medelproportionaler x och y till två givna sträckor a och $2a$:

$$a : x = x : y = y : 2a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Man får

$$x^2 = ay; \quad y^2 = 2ax,$$

varav

$$x^4 = a^2y^2 = 2a^3x;$$

$$\therefore x^3 = 2a^3,$$

d. v. s. x är kanten i en kub med dubbelt så stor volym som kuben a^3.

Problemet kan alltså lösas med hjälp av parablerna $x^2 = ay$ och $y^2 = 2ax$ eller med en av dessa parabler och hyperbeln $xy = 2a^2$. Olika metoder ha angivits, varvid man använt sig, liksom ovan, av koniska sektioner eller av högre grads kurvor, t. ex. DIOCLES' cissoid, hyperbel av andra ordningen ($xy^2 = a^3$, VIVIANI), Pascals snäcka (NEWTON) o. s. v. I det följande skall anges en metod, som bygger på den ovan nämnda, av Archimedes och Vieta angivna, men som också mycket enkelt och praktiskt löser problemet angående kubens fördubbling.

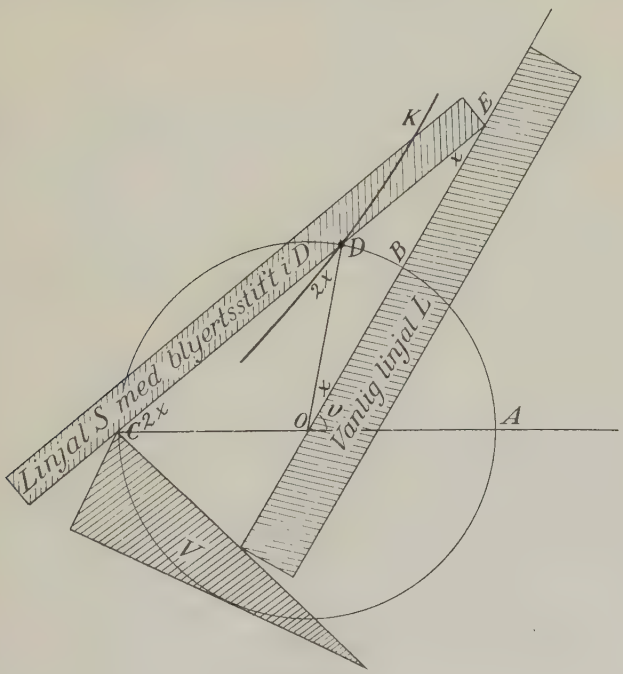


Fig. 1.

I fig. 1 är $AOB = v$ den givna vinkeln. För konstruktionen användes en vanlig linjal L, en annan linjal S, försedd med ett fixt blyertsstift D och något föremål med skarpt hörn C, t. ex. en vinkelhake V.

Lösning: Tag O till medelpunkt för en cirkel med avståndet DE från blyertsstiftet till linjalens närmaste ändpunkt E till radie. Lägg linjalen L med kanten utefter vinkelbenet OB, så att linjalen kommer att ligga på samma sida om OB som vinkeln v. Lägg vinkelhaken med det skarpa hörnet i C och låt vinkelhaken och linjalen stödja varandra, så att högra handens tumme på V och ett par andra fingrar på L kunna hålla det hela fast tryckt mot papperet. Lägg sedan linjalen S, så att den kant, i vilken blyertsstiftet är fästat, vilar mot hörnet C och ändpunkten E vilar mot linjalen L. Föres sedan linjalen S med vänstra handen fram och tillbaka, ritar stiftet konkoidgrenen K, som skär cirkeln i D.

Påst.: $\angle BOD = x = \frac{v}{3}$,

vilket omedelbart inses som en följd av satsen om yttervinkeln (se beteckningarna i fig.).

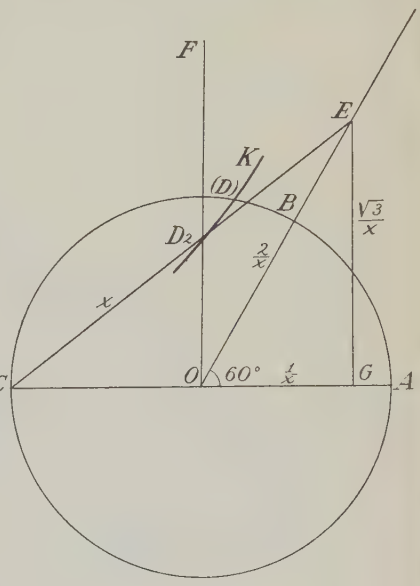


Fig. 2.

Göres $v = 60°$ (se fig. 2) och drages $OF \perp AC$, skär konkoiden normalen OF i en punkt D_2. Man har då lösningen av problemet angående kubens fördubbling, emedan *CD_2 är kant i en kub med dubbelt så stor volym som kuben med kanten OA.*

Ty om CD_2 utdrages till E och EG drages $\perp CA$, har man att

$$OG : D_2E = CO : CD_2,$$

eller, om $OA = CO = D_2E = 1$ och $CD_2 = x$,

$$OG = \frac{1}{x}.$$

Emedan $\angle AOE = 60°$, har man, att

$$GE = \frac{\sqrt{3}}{x},$$

varav

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{3}{x^2} = \left(x+1\right)^2,$$

varav

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0,$$

eller

$$(x^3 - 2)(x+2) = 0.$$

$$\therefore\ x = \sqrt[3]{2}.$$

x är den första medelproportionalen i systemet (1) ($a=1$). Emedan om den andra medelproportionalen y gäller, att

$$y = x^2 = \sqrt[3]{4} = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2}{x},$$

är den geometriskt konstruerad medelst linjen OE.

Om geometriundervisningen, mål och metod.

Av HJALMAR OLSON.

II.

I och med 4:e klassen hava lärjungarna i allmänhet nått en sådan förståndsmognad, att den deduktiva metoden kan få bli huvudsak, ehuru naturligtvis åskådlighetskravet ständigt måste tillgodoses och, såsom förut framhållits, försöksmetoden ej helt övergivas. Beträffande undervisningen på detta stadium kunna åsikterna divergera på många punkter.

Vi vilja först stanna något vid frågan angående utgångspunkterna och satsordningen. Skall man därvidlag följa Euklides, eller kunna andra utgångspunkter och en annan ordning vara att föredraga?

I Sverige har man kanske längre än annorstädes använt Euklides, och även om gamla skolstadgor tillåto andra anordningar i satsföljden, så rekommenderade de, som t. ex. 1820 års skolordning gör, Euklides' Elementa som den bästa. Även i vår tid har det Euklideiska systemet sina förkämpar, och i Sverige är det särskilt lektor H. Petrini, som dragit en lans för systemets förträfflighet; han anser, att det icke finnes någon »möjlighet att rubba på det grundläggande Euklideiska systemet det ringaste grand utan att samtidigt pruta av på strängheten». Dock medgives av dem, som för övrigt hålla på Euklides, att vissa omplaceringar av större grupper av satser kunna vara motiverade. Så förordade nyssnämnda 1820 års skolordning, att Euklides' tredje bok, så när som de sista satserna, borde komma efter den första, sedan den andra boken, därpå

de återstående satserna i tredje boken och så till slut den fjärde.

Enligt nu gällande kursfördelning skall läran om cirkeln påbörjas i 4:e klassen, och först i 5:e klassen skola ytteoremen genomgås. Detta innebär för skolor, där Euklides' framställning följes, att första boken avslutas i klass 4 med sats 34, parallellogramsatsen, varefter omedelbart tagas de första satserna i tredje boken. Många anse det lämpligt, att låta läran om cirkeln rycka ännu mer fram i början av geometristudiet på grund av den genomgående stora roll, cirkeln spelar vid alla konstruktioner. I 5:e klassen tages enligt anvisningarna återstående delen av tredje och första böckerna samt fjärde boken, medan andra boken helt och hållet bör förbigås. Vill man dock genomgå 12.e och 13:e satserna i denna bok, d. v. s. cosinusteoremet i rent geometrisk dräkt, bör den algebraiska metoden användas. Satserna i fjärde boken om gyllene snittet och regelbundna tiohörningen samt satserna i tredje boken angående varandra skärande kordor uppskjutas till gymnasiet och tagas i samband med likformighetsläran.

Emellertid har sedan långa tider tillbaka kritik framkommit beträffande detaljordningen av satserna och utgångspunkterna i den Euklideiska framställningen. Även om det måste fastslås, att Euklides utgått ur kritikens skärseld i det stora hela rehabiliterad med avseende på systemets rent vetenskapliga karaktär, särskilt då man genom Lobatjevskijs och Riemanns (för att blott nämna ett par namn) undersökningar fick fastslaget, att parallellaxiomet verkligen var ett axiom och således Euklides' geometri en logiskt grundad systembyggnad, kvarstår dock, att systemet dels lider av vissa inkonsekvenser med avseende på hjälpmedlen och bevismetoderna, dels ur psykologisk och pedagogisk synpunkt är mindre lämplig i oförändrad form som lärobok för barn. Som en inkonsekvens har framhållits Euklides' bruk av förflyttningsmetoden, vilken metod han ej kunnat undvara men vars användning han inskränkt

till åtminstone formellt en enda sats, det 1:a kongruensfallet. Vid de vetenskapliga försöken att upprätta motsägelsefria och fullständiga system av geometriska grundbegrepp och grundsatser, som kritiken av det Euklideiska systemet under 1800-talet hade till följd, fanns det beträffande rörelsebegreppet två vägar att slå in på. Den ena vägen var att alldeles bannlysa detta begrepp ur geometrien och uppbygga axiom och grundbegrepp oberoende av detsamma. Här räcker det att nämna namnet HILBERT och hans arbete »Grundlagen der Geometri». Hans geometri innehåller ej mindre än 21 rent geometriska axiom, och bland dessa är just 1:a kongruensfallet upptaget.

Den andra vägen är att fullt medvetet införliva rörelsebegreppet med de geometriska grundbegreppen. Talrika äro de geometriska system, som hava denna utgångspunkt, och som föregångare kan nämnas VON HELMHOLTZ. Det är betecknande, att det särskilt är författare av läroböcker för skolbruk, som bygga på stela kroppars rörelse vid uppställandet av geometriens grunder. Man kan härvidlag nämna en lång rad av särskilt italienska namn. I synnerhet är det PEANO, som med vetenskaplig skärpa och med tydligt framhävande av gruppbegreppet återför kongruensen på rörelsebegreppet. Och man må tvista om sakens vetenskapliga sida, ur pedagogisk synpunkt måste man medge, att det är att beröva geometrien ett av åskådningens allra primitivaste begrepp, då man försöker bygga upp den bortseende från all rörelse. Det är ju genom föremålens olika plats i rummet som vårt perspektiviska seende utbildas. För att få en geometrisk uppfattning av ett föremål vilja vi så att säga se det från alla sidor, vilket sker genom förflyttning av oss själva eller föremålet. Generationsförfarandet, att en linje bildas genom en punkts rörelse eller en yta genom en linjes, är ju också för vår geometriska uppfattning alltför fruktbringande och tyckes oss så naturligt, att varje stel geometri ger oss intryck av något overkligt, som ej har något med vår rörliga värld att skaffa. Och när det ändå, då det gäller våra lärjungars förstånds-

utveckling, torde vara ogörligt att införa en Hilberts geometri med sina 21 axiom, finns det intet skäl att med Euklides stanna på halva vägen, utan det torde vara bäst att först som sist låta rörelsebegreppet i geometrien spela den väsentligaste roll, den ur praktisk och åskådlighetssynpunkt förtjänar att göra.

Andra frågor av mera metodisk art, som man har att taga ståndpunkt till vid geometriundervisningen i 4:e och 5:e klasserna, äro följande: Hur skola axiomen och definitionerna införas? Skall man börja med dem och sedan taga sats för sats i sträng logisk följd, eller skola axiomen och definitionerna tagas upp till behandling, allteftersom de komma före i de olika satserna? Skola *alla* satser bevisas, vilka enligt strängt logiska lagar *kunna* och således på den grund böra bevisas, eller törs man, vädjande till åskådningen och till i 3:e klassen eller nu utförda experimentella undersökningar, taga somliga satser utan logiska bevis? Hur bör det inkommensurabla fallet behandlas? I vilken utsträckning bör man i analogiläran och för övrigt tillåta algebraiska metoder, utan att räknelagarna äro strängt bevisade annat än genom analogislut från heltalsläran? Detta är några frågor, som på ett eller annat sätt måste besvaras av den, som går att meddela undervisning i geometri.

Då inledningsvis beträffande geometrimetodiken skildes på det deduktiva och det systematiserande stadiet, är därigenom också de flesta av de nyss framställda frågorna i stort besvarade, när det gäller lärjungar av 4:e och 5:e klassens åldersstadium. Och min uppfattning överensstämmer i det stora hela med vad gällande undervisningsplan har att säga härom.

Först och främst anser jag, att axiomen ej böra genomgås isolerade för sig utan tagas upp till behandling, allteftersom de i de olika satserna komma före. Många av dem äro då redan expedierade i ekvationsläran, och jag tror, att man åtminstone ej till att börja med bör göra för stort väsen av dem. Det kan visa sig ibland, att en lärjunge ej förstår att vid ett bevis draga en axiomatisk

slutsats, beroende på, att det han talar om, all åskådlig undervisning till trots, har blivit honom för abstrakt. Då byter man ut de geometriska begreppen mot för honom mera konkreta: »Om du, Erik, är lika lång som Karl, och Karl är lika lång som Stig, vad kan du då säga om dig själv och Stig?» På så sätt brukar det vanligtvis gå bra, men det händer, att han även då står oförstående. Det behöver då ej bero därpå, att han ej kan dra den rätta slutsatsen, utan tack vare satsens axiomatiska natur har han omedvetet dragit densamma; så att, när han får veta det riktiga svaret, det kan hända, att han säger: »Ja, det är ju självklart; jag trodde magistern menade något annat.» Onödigt är det att lära dem att säga: enligt axiom 1 eller enligt det axiom, som säger o. s. v. Man hör ofta på hans sätt att bevisa saken och på den större eller mindre säkerhet, med vilken han gör sina påståenden, eller på de större eller mindre språng, han gör i bevisföringen, huruvida det då och då kan vara lämpligt att upptaga ett axiom till närmare skärskådande.

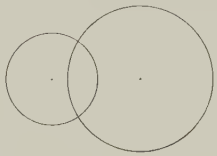
Detta gäller nu de rent aritmetiska axiomen. Beträffande de geometriska axiomen och postulaten så kunna ju dessa inom vissa gränser väljas rätt godtyckligt, men som axiom få kunskapsteoretiskt gälla blott sådana satser, som ej kunna härledas ur andra. Det är klart, att man ej med någon behållning kan ge sig in på dylika frågor i 4:e och 5:e klasserna, och de metodiska anvisningarna i gällande undervisningsplan rekommenderar med uppgivande av den kunskapsteoretiska synpunkten en utökning av axiomens antal att omfatta satser, som genom åskådningen kunna anses omedelbart givna. Man kan då, som undervisningsplanen säger, »inskränka bevisföringen till sådana satser, i fråga om vilka lärjungen kan anses känna behov av bevis».

I princip har jag intet emot en sådan metod; jag skulle blott vilja rekommendera, att ordet axiom eller självklar sats reserverades just för själva utgångspunkterna; att någon gång nämna, att dylika utgångspunkter äro för allt

vårt tänkande nödvändiga, bör man ej vara rädd för. Även om det för de flesta faller på hälleberget, kan det hos en och annan spekulativt anlagd lärjunge falla i god jordmån och i sinom tid bära frukt. Andra satser, som man tar utan bevis, bör man ej säga vara självklara. Bättre då att säga, att det hava vi visat genom experiment eller det följer av figurens symmetriska form e. d. Det bör dock sägas ifrån, att man också kan bevisa satsen strängt, och om det roar någon att göra det, hänvisa honom till bokens bevis. För de övriga är det då blott själva satsens formulering, som bör ges i läxa. Härav följer också, att läroboken bör innehålla de logiska bevisen. Detta är lämpligt särskilt för repetitionernas skull och för att man skall ha fria händer att på ett högre stadium taga upp beviset av en sats, som man förut lämnat utan bevis. Det är ju dessutom rätt mycket en smaksak, vilka satser man i 4:e och 5:e klasserna på detta sätt låter lärjungarna få till skänks, och det vore därför ej lämpligt att på denna punkt vara bunden av lärobokens framställning.

När de metodiska anvisningarna tala om satser, som kunna anses genom åskådningen omedelbart givna, torde en viss försiktighet på denna punkt vara att rekommendera. Häri kunna ofta ligga farliga generalisationer. Det är nämligen att observera, att när man tillgriper åskådningen, så är det särskilda och vanligen rätt så tillrättalagda figurer, som lärjungen ser för sig. Han ser ett specialfall och generaliserar sedan för det allmänna fallet. Vi veta ju alla, hur även vi äldre ofta ha svårt, när vi skola bevisa en sats, att undvika specialfall, då vi rita figuren. Triangeln vill lätt bli liksidig, och vilja vi korrigera figuren, så blir en vinkel rät o. s. v. Och hur ofta få vi inte bevittna, hur en lärjunge bevisar en sats blott för ett specialfall, eller då han — för att taga ett annat område av matematiken — skall bevisa något om ett tal, vilket som helst, skriver: »Vi taga t. ex. talet 4», i den tron, att han därmed har presterat ett allmänt gällande bevis, då han ju tog ur högen ett tal vilket som helst, nämligen talet 4. Lika fruktbringande

generaliseringsförfarandet har varit inom olika vetenskaper som *arbetsmetod*, lika omöjligt är ju detsamma som *bevismetod*. Att gärna vilja generalisera är nu en av människans många odygder och har som bekant ställt till mycket elände på vår jord. Inom matematiken har man många och bekväma tillfällen att visa, hur galet dylikt kan leda. Om man frågar en pojke, i hur många punkter två cirklar kunna skära varandra, svarar han utan att blinka: *två!* Hur vet du det? Jo, det är ju självklart, det ser man ju bara man ritar:



Det sägs, att det är av ondo att så tvivlets ogräs i oskyldiga barnasjälar, men då det gäller att rubba deras kolartro på de yttre sinnena, tror jag det kan vara berättigat. Bed honom då rita två cirklar (helst lika stora, så att tangentfallet undvikes) med medelpunkterna rätt nära varandra i förhållande till radiernas längder; åskådningen visar ju då, att de båda cirklarna ej hava blott två punkter utan hela bågar gemensamma. Och i och med det är ju frågan i alla händelser diskutabel. Det är ju klart, att genom sådana diskussioner väckes lärjungarnas intresse för att få saken bevisad. Man kan instämma i de metodiska anvisningarna, då där säges, att bevis bör inskränkas till satser, för vilka ett behov från lärjungarnas sida gör sig gällande. Men på samma sätt som ett litterärt verk eller en teaterpjäs aktas högre i den mån de, i stället för att ockra på sin publiks dåliga smak, verka uppfostrande och bildande på densamma, på samma sätt bör det vara en av undervisningens uppgifter att just väcka till livs ett behov, där det icke finns på grund av ett outvecklat logiskt sinne och en bedräglig åskådlig uppfattning. Man bör ej glömma, att det var på grund av åskådningen, man i gamla tider

ansåg, att jorden var platt, och att Euklides' geometri bygger på vår åskådliga uppfattning om parallella linjer, ehuru de lärda för närvarande diskutera nödvändigheten av att utbyta den mot en generellare geometri för förklaringen av en del företeelser i vår fysiska värld.

Må emellertid var och en i denna fråga handla efter sitt vetenskapliga och pedagogiska samvete, när man en gång bestämt sig för att en sats skall bevisas, bör man se till, att beviset blir strängt logiskt. Vissa besvärligheter stöter man här på. Många lärjungar visa sig ha rätt svårt, i synnerhet i början, att skilja på antagande och påstående och att hålla klart för sig, vad man får och vad man *inte* får stödja sig på, när en sats skall bevisas. Här kommer det mycket an på en lämplig preparation. I varje särskilt fall bör figuren ritas så, att förutsättningen tydligt kommer fram. Skall man t. ex. visa, att vinklar mot lika stora sidor i en triangel äro lika stora, bör man rita en triangel med två sidor lika och markera ut det man vet något om på grund av konstruktionen (fig. 1). Gäller det att visa omvändningssatsen, ritas i stället en triangel med två lika vinklar (fig. 2), och det blir för lärjungarna åskåd-

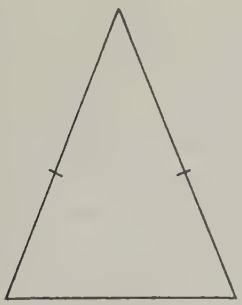


Fig. 1.

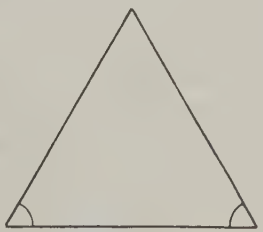


Fig. 2.

ligt framställt, vilken olikhet ligger i de båda satserna, som för deras öron låta så lika. Allra tydligast kommer olikheten att framträda för dem, om man vid genomgång av den andra satsen låter figuren till den första stå kvar, så att direkt jämförelse mellan de båda satsernas natur

blir möjlig. Beträffande vad barn ha behov av att få bevisat, ha vi här, då det gäller omvändningssatser, ett gott exempel på, att ett behov skall väckas, som kanske många lärjungar vid denna ålder icke hava. Innan en geometrisk omvändningssats bevisas, bör man från deras egen erfarenhetsvärld ge dem exempel på satser, som ej låta sig vändas. Har man gett dem ett exempel, t. ex. satsen »om det regnar, så blir det vått», äro de själva roade av att ställa upp flera ej omvändbara satser.

När en sats skall genomgås, bör man i allmänhet ej ge dess innehåll i förväg. Man bör t. ex. ej säga: »I dag skola vi bevisa, att en medelpunktsvinkel är dubbelt så stor som en periferivinkel på samma båge.» Därmed tar man ju bort den bästa bouqueten av hela undersökningen. I stället bör det låta: »Det skall bli intressant att undersöka om medelpunktsvinklar och periferivinklar på något sätt ha med varandra att göra, om man av den enas storlek kanske kan påstå något om den andras.» Figur är uppritad på tavlan och bokstäver utsatta, så att man bekvämt och utan missförstånd kan resonera om olika element.

Ibland kan dock en motsatt väg vara att rekommendera, särskilt då det gäller en sats med ett ej anat innehåll och som kräver ett långt och invecklat bevis. Som exempel kan nämnas Pythagoras' sats. Den bör först genom undersökning på specialfall göras plausibel. Lärjungarna åläggas att rita en noggrann figur av en triangel med sidorna 3, 4 och 5 cm samt mäta den största vinkeln och för övrigt konstatera satsens giltighet i detta fall. Sedan kan man visa dess giltighet på den likbenta rätvinkliga triangeln genom ritning, t. ex. enligt fig. 3. När man kommit så långt, inställer sig den frågan osökt, om denna märkvärdiga sats möjligen kan gälla generellt. Nu är det Euklideiska beviset ett rätt besvärligt bevis; visser-

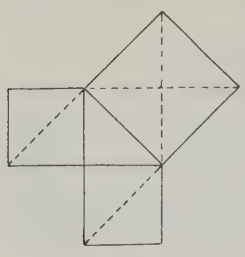


Fig. 3.

ligen kan man nog få lärjungarna att hålla ihop det, och det ger ju nyttiga tillämpningar på ytsatserna. Lämpligt är dock att, om inte ersätta det, så dock låta det föregås av ett algebraiskt bevis, där de få en vacker tillämpning på sina algebraiska formler. Det bekanta beviset av sannolikt indiskt ursprung är ju så enkelt och vackert, att mången lärare kanske därmed låter sig nöja: Placera fyra kongruenta rätvinkliga trianglar såsom i fig. 4 eller fig. 5.

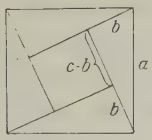


Fig. 4.

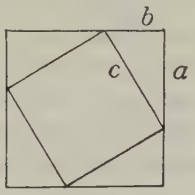


Fig. 5.

I t. ex. det senare fallet har man då, att

$$(a+b)^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2 \quad \because \; a^2 + b^2 = c^2.$$

Vid preparationen är det ofta för tids vinnande bäst, att läraren själv sköter linjal, passare och krita, men så, att hela klassen känner, att man är på gemensam upptäcktsfärd. Då det däremot gäller förhöret av läxan, skall läraren spela en passiv roll. Ofta får den bestå i att hålla tillbaka ivrigt viftande händer, då den, som har frågan vid tavlan, gör något fel, drar en oriktig linje e. d. Han bör få hålla på, tills han blir färdig, eller tills man märker, att han verkligen inte kan klara uppgiften. Vid förhöret är det onödigt att sätta ut bokstäver; det går enklare att peka tydligt och tala om den vinkeln och den linjen o. s. v. Huvudsaken är, att han gör det tydligt och står ordentligt åt sidan, så att alla se klart, vad han menar. Lärjungen bör ej i allmänhet få motivera med satsnummer, utan i stället säga t. ex., »emedan de äro vertikalvinklar» eller »emedan de äro alternatvinklar till två parallella linjer». Gör han språng i bevisföringen eller ej på alla punkter lämnar tillräcklig motivering, bör han ej störas härför

under bevisets gång utan kan i stället utfrågas efteråt härom. Beträffande lärjungarnas sätt att läsa på sina satser hemma skall sägas ett par ord. Varje elev bör ha en särskild bok, i vilken han gör sina geometriska ritningar. Han bör tillhållas att bevisa sin sats först kanske efter bokfiguren, men sedan efter egna figurer, helst utan bokstäver och av olika form och läge. När lektionen börjar, böra lärjungarna hava ritboken uppslagen på pulpeten, och läraren kan då genom en hastig rond genom klassen kontrollera detta, och därvid ge en eller annan anvisning med anledning av hur figurerna ritats etc. När sedan satsförhöret börjar, böra böckerna läggas ned och för övrigt pulpetlocken vara tomma. Inga böcker eller pennor framme, som kunna distrahera: all uppmärksamhet riktad på tavlan. Men man får komma ihåg, att ej för sällan låta den deduktiva lärogången omväxla med praktiska övningar; det kan bli för mycket av logik ibland, för mycket av det goda.

Ett viktigt moment på detta stadium är problemlösningen. Stor vikt ligger då uppå, att det blir synnerligen enkla uppgifter, mest med avsikt att belysa de genomgångna satserna och ej för uppnåendet av någon färdighet i att lösa geometriska uppgifter. Bäst blir satsen belyst med planimetriska tillämpningar, men rent geometriska sådana böra också förekomma.

De begrepp, som komma till användning, böra definieras, allteftersom de behövas. Alla behöva ej definieras, vilket ju ej heller är möjligt. Några primitiva begrepp har man alltid som utgångspunkt. När då en definition gives, bör man se till, att lärjungarna verkligen få en klar uppfattning av dess innebörd, annars är fara värt, att de lära sig rabbla upp en massa ord utan motsvarande realitet bakom. Begreppsbildningen sker ej med orden, utan den skall vara färdig, då man går att utforma definitionen. Men nu då det sker, bör man se till, att de definitioner, som uppställas, bliva logiskt riktiga. Lärjungen bör ej få säga: »En parallellogram är en fyrsiding, som har motstående sidor parallella och lika stora», en »definition» som ej är

ovanlig. Men han bör rättas på ett förståndigt sätt, t. ex. genom att man frågar, vad man kallar en fyrsiding, som har motstående sidor parallella men *icke* lika stora.

Beträffande det inkommensurabla fallet behöver det ej alls beröras i 4:e och 5:e klasserna, utan man nöjer sig med att bevisa rektangelsatsen för hela tal och bråk. Det kan ifrågasättas, huruvida det ens lönar mödan att göra det i klass 6 och ring I, då lärjungarna lära känna de irrationella storheterna. Likaväl som man *upplyser* dem om, att för irrationella storheter gälla de räknelagar, som de känna för de hela talen, men att det är fråga om alldeles för lärda saker för att kunna bevisas för dem, lika bra kan man väl säga dem, att ett strängt bevis för rektangelsatsen låta vi tills vidare vara för att tas upp vid en senare tidpunkt. Däremot bör man göra satsen plausibel för dem genom att framhålla, att det är att vänta, att felet i ytan bör kunna fås hur litet som helst, när man kan ersätta sidornas längdtal med rationella mätetal, vilkas fel man kan göra godtyckligt små. Man skall inte tro, att en lärjunge i ring I säkert trängt in i ett strängt exhaustionsbevis, även om han lyckas i ord prestera ett formfulländat bevis, eller om man tycker, att man fått lärjungarna med på saken vid preparationen. Detta är utredningar, som ej passa för detta stadium, däremot kan saken med framgång diskuteras i 3:e eller 4:e ringen i samband med motsvarande satsers behandling i stereometrien.

Hava lärjungarna fått veta, att de irrationella storheterna följa samma räknelagar, som de hela talen och bråken, kan man gott införa sträckornas mätetal och resonera om dessa i stället för sträckorna själva; hela den s. k. proportionsläran blir då, såsom framhålles i de metodiska anvisningarna, som särskilt moment överflödig. Det fåtal satser rörande analogier, som behövas, härledas då rent algebraiskt. Härmed har man redan på detta stadium infört en analytisk metod, som man låter stödja och växelverka med den syntetiska metoden.

Hela den geometriska lärokursen medhinnes ju ej i 4:e

och 5:e klasserna, utan för gymnasiet återstår likformighetsläran och rymdgeometrien. På detta sätt kommer det deduktiva stadiet att sträcka sig ända upp till 3:e ringen, där stereometrien behandlas. Emellertid hava nu lärjungarna nått en sådan förståndsutveckling, att man med framgång kan anlägga mera översiktliga synpunkter. Detta passar bra, då man i ring I skall repetera det i föregående klasser genomgångna, varåt man i allmänhet brukar anslå något mer än höstterminen. Det torde icke vara nödvändigt att lägga denna repetition så, att man i detalj tar om igen sats efter sats, som förut lästs, utan bättre är att som regel repetera satserna genom övningsuppgifter. Det blir ju samma logiska övning, och de förut inlärda satserna komma genom övningsuppgifterna till erinran. Satser, som ur en eller annan synpunkt erbjuda något av intresse, kunna ju särskilt tagas upp; t. ex. någon sats, som förut tagits utan bevis, kan här logiskt passas in i systemet, om man så finner lämpligt. För övrigt är det mera givande att göra sammanfattningar och ge överblickar över de satser, de skola känna. Beträffande övningssatserna, så böra de, som i det föregående framhållits, i regel vara mycket enkla, i alla händelser ej svårare än att de flesta gå i land med uppgiften. Det torde knappast vara lämpligt, att *fordra* någon egentlig förmåga av lärjungarna i detta avseende. Det har lätt till följd, att de taga olämplig hjälp, av fruktan för att stå som den, som ej kunnat klara uppgiften. Man får ej heller lita för mycket på deras meddelanden, att de fått ut en uppgift, utan som regel böra uppgifterna, de haft i läxa, genomgås, även om alla säga sig ha fått ut dem. Det kan ge rätt mycket; begångna fel komma fram och bli rättade, olika lösningsmetoder bli diskuterade och jämförda med varandra och specialfall, som lärjungarna ej tänkt på, bli upptagna till behandling. Enkla och eleganta lösningar tilltala lärjungarna mycket, men det är lämpligt att ge erkännande även åt en mera tillkrånglad lösning, som en lärjunge presterar, ty bakom densamma ligger ofta ett aktningsvärt arbete, som är värt sin uppmuntran. Ej heller

på skrivningarna bör man fordra geometriska uppgifter för godkänd; däremot bör man alltid ha åtminstone en sådan uppgift med, en regel, som helst bör tillämpas hela gymnasiet igenom, så att tillfälle till övning ges åt sådana, som härför äro särskilt intresserade. Den algebraiska analysmetoden införes ju i ring I och bör sedan vara den viktigaste. Det är ju ofta en lätt och bekväm metod och fattas även av sådana lärjungar, som ha mycket svårt för rent syntetiska metoder. De få rätt snart klart för sig, att det här gäller en rationell metod, medan den syntetiska metoden för många alltjämt förblir en gissningsmetod. Man bör dock ej underlåta, då tillfälle härtill gives, att visa lärjungarna, hur mycket enklare och elegantare ofta syntesmetoden kan vara. Vid användande av den algebraiska metoden blir beviset onödigt; det ligger, som det brukar sägas, i analysen, i den mån vid denna användas reversibla operationer. Man bör härvid göra klart för lärjungarna, vad detta innebär, så att det ej blir för dem endast en tom fras.

Den praktiska tillämpningen på sina geometriska satser få lärjungarna, utom vid de rent geometriska övningssatserna, i planimetrien. Planimetriska uppgifter skola förekomma i alla klasser med början redan i andra klassen med rektangeln och avslutas i ring R II, resp. ring L III med en sammanfattande kurs. Meningarna kunna här vara delade angående hur mycket, som vid denna sammanfattning bör medtagas. Jag anser för min del, att rätt stora inskränkningar äro lämpliga, varigenom mera tid erhålles för andra grenar av matematiken. Projektionssatserna, d. v. s. Euklides' 12:e och 13:e satser i andra boken, är det onödigt att taga upp i planimetrisk formulering, när man kan giva dem en så elegant form som i cosinusteoremet. Satserna om medianens och bissektrisens längder tagas också bekvämast trigonometriskt som specialfall av Stewarts teorem. En systematisk behandling av läran om regelbundna månghörningar kan även betraktas som onödig. Går man igenom, hur man planimetriskt kan beräkna kordan för halva och dubbla bågen jämte en och annan tillämpning på 8-, 12-

eller 5-hörningar e. d., torde det vara fullt tillräckligt med denna sak.

Angående rymdgeometriens ställning på olika stadier föreskriver undervisningsplanen särskild behandling av rymdgeometrien för realskolan i 6:e klassen och för gymnasiet i ringarna R III och L IV. För klass 6 är det dock blott frågan om de första elementen, och kursen är endast påbjuden eventuellt med hänsyn till klassens mogenhet och det mått av tid, som kan ägnas däråt. Med denna kurs avses att uppöva lärjungarnas förmåga att fatta rumsförhållanden. Emellertid bör, som jag förut framhållit och som även de metodiska anvisningarna förorda, man redan i föregående klasser använda tillfällena, som ges, till rymdgeometriska iakttagelser och resonemang. Liksom man i de lägsta klasserna bör taga som utgångspunkt de geometriska kropparna, är det lämpligt att vid plangeometriens behandling i de följande klasserna, då och då göra rymdgeometriska betraktelser. T. ex. då man från en punkt skall draga en normal till en linje, hur det då blir med antalet lösningar om man går utanför tavlan och tänker på rymden runtomkring linjen. Eller hur räta linjer kunna ligga i förhållande till varandra i rymden, allt genom åskådliga betraktelser i rummet. Begreppen normaler och normalplan, parallella linjer och plan, tangentplan, vinklar mellan plan och emellan räta linjer och plan etc. införas vid stereometriundervisningen i realskolan genom ren åskådning, utan att man behöver hålla på stränga definitioner och bevis. Beträffande de kvantitativa satserna räcker det med mindre stränga betraktelsesätt och experimentella metoder. T. ex. att en pyramids eller en kons volym är tredjedelen av det motsvarande prismat eller cylindern, kan visas genom vägningsmetoden eller genom att fylla cylindermåttet med vatten i tre omgångar medelst ett mått av konisk form med samma bas och höjd o. s. v.

Angående den rymdgeometriska kursen på gymnasiet bör den enligt de metodiska anvisningarna inledas med en sammanfattning av satserna rörande räta linjer och

plan, vilka satser »böra genomgås med omsorg, dock på latinlinjen mera kursivt, men vikt bör icke läggas på inlärande av bevis för dessa satser». På denna punkt äro meningarna delade. Somliga lärare anse, att man bör fordra av lärjungarna, att de skola kunna hålla ihop dessa satser och behärska tankeföljden, så att de kunna redogöra för, hur den ena följer ur den andra. Andra anse det tillräckligt, om man går igenom satsernas bevis i skolan men ej fordrar bevisen i läxa utan låter det vara nog med att lärjungarna känna satsernas innehåll. Det första sättet kan jag för min del ej gilla; jag kan ej se vad som kan vara vunnet med att upprätthålla sådana fordringar. Det kan lätt bidra att väcka leda för ämnet hos lärjungar, som annars ej behöva ha svårt för matematik. Målet för stereometriundervisningen bör främst vara utom rumsföreställningens utbildande förvärvandet av de viktigaste speciellt kvantitativa stereometriska satserna för praktiska tillämpningar, mindre bör avses utbyggandet av en logisk systembyggnad. Emellertid anser jag, att lärjungarna böra ha bevisen i läxa. Att de en gång tvingas att behärska beviset, måste ju vara dem till nytta och gör att de på ett säkrare och mera givande sätt sätter sig in i satsens innehåll. Däremot är det onödigt att vid en repetition åter taga igenom bevisen mer än möjligen översiktligt. Men bevisen, när de genomgås, böra föras visserligen strängt, men också så åskådligt som möjligt. En metod, som härvidlag särskilt är att rekommendera, är att låta bevisen på figurer, ritade på tavlan, omväxla med bevis utförda i rummet. Där har man god tillgång på plan och linjer och punkter för att åskådligt kunna redogöra för antagande och påstående samt utföra beviset. Många av dessa satser kunna bli rätt besvärliga för vissa lärjungar, men jag tror, att en dylik bevismetod i rummet i stället för på en figur gör saken åskådligare. Bevismetoden med figurer är naturligtvis också viktig. Särskilt ger den ju lärjungarna tillfälle att rita tydliga och åskådliga figurer, och man bör även aktge på att de bli *riktiga*. Det skadar inte, att man

ägnar nödig uppmärksamhet åt frågan om de rymdgeometriska storheternas riktiga avbildning i planet.

När undervisningsplanen för gymnasiet föreskriver en sammanfattande repetition i 4:e ringen av de viktigaste delarna av föregående ringars kurser, kan man fråga sig, hur detta bör tillämpas på den syntetiska geometrikursen. Det händer nog, att mången lärare anser tiden vara för knapp för att våga offra några timmar häråt, och har man en särskilt svag avdelning, vilket ju kan hända, blir det nog nödvändigt att lägga undervisningen med uteslutande tanke på den förestående examen, och då torde det vara bortkastat att taga upp ren geometri i repetitionerna. Men har man en normal avdelning, kan man nog få tid till en översiktlig kurs i detta ämne. En överblick av de vanligaste metoderna vid lösning av geometriska problem, tillämpad på ej för svåra, men typiska uppgifter är då lämplig: Den algebraiska metoden, ortmetoden, några transformationsmetoder, såsom parallellförflyttning, vridning, omläggning och användande av hjälpfigurer.

I samband med genomgåendet av dylika allmänna lösningsmetoder är det lämpligt att diskutera mera översiktliga frågor och spörsmål av mera kritisk natur och av allmänbildande art. Hit hör frågan om möjligheten av konstruktioner med endast passare och linjal, frågan om vinkelns tredelning, cirkelns kvadratur, konstruktion av regelbundna månghörningar o. s. v.

Mycket lämpligt och givande bör det vara att på detta stadium kritiskt granska den under de gångna åren uppbyggda plangeometriska systembyggnaden. Lärjungarna hava med åren blivit så vana vid att bevisa allting och hava därför en känsla av att alla deras resultat, såväl i geometrien som i övriga delar av matematiken, som de behandlat, äro säkert grundade och hänga ihop utan avbrott. Det är då av nytta att taga dem ur denna villfarelse. Man bör visa dem, hur för en del satser och regler ej givits exakta bevis, utan hur regler för specialfall utan vidare ha tagits och tillämpats på allmännare fall. Så t. ex.

beträffande räknelagarna för irrationella tal. Har man nu utan vidare infört mätetalsbegreppet i den geometriska bevisföringen, böra lärjungarna få klart för sig, att här är en lucka i deras logiska system. Om satser tagits utan bevis direkt från åskådningen, är detta också någonting, varpå de böra uppmärksammas. Till slut är tillfället här lämpligt att beröra frågan om geometriens utgångspunkter och förutsättningar och ge lärjungarna antydningar om »icke Euklideisk geometri» och vilken roll sådana geometriska system kunna spela, då det gäller teorier och hypoteser angående den fysiska tillvaron. I fysik och kemi och de naturvetenskapliga ämnena överhuvud få lärjungarna erfara, hur allting för närvarande beträffande teorierna flyter; det kan ej skada, att de också få en liten inblick i, att även inom matematiken, den exaktaste av alla vetenskaper, finnas byggnader, som vackla på sina grundvalar, att man även där så att säga arbetar med hypoteser. En fransk kemist, Émile Duclaux, har yttrat att »det att vetenskapen aldrig är säker på någonting, är orsak till att den alltid gör framsteg». Om vi genom vår undervisning i geometri och andra ämnen lyckats bibringa den färdige studenten ej så mycket en tvärsäker föreställning om att han är så lärd, som fastmera en ödmjuk känsla av att han egentligen ingenting vet, fattat i den djupare mening, Duclaux inlägger i det nyss citerade yttrandet, då kan man väl säga, att undervisningen ur formell bildningssynpunkt ej varit utan gagn.

Om undervisningen i elektrostatik.

Av OTTO GALLANDER.

Det är vanligt, att fysiklärare anse de elektrostatiska fenomenen giva mer konkret föreställning om elektriciteten än de elektromagnetiska. För att riktigt starkt framhålla detta sade en gång en lektor i fysik: De elektrodynamiska fenomenen får man uppfatta som verkningar av den elektriska strömmen. Om den elektriska strömmen får man blott veta, att den är orsaken till en del fenomen. Strömmen blir på detta sätt något mycket abstrakt. Och om man sedan vill tolka fenomenen med hjälp av elektronteorien, får man antaga, att elektronerna repellera varandra. Annorlunda ställer sig saken, då man behandlar de elektrostatiska fenomenen. Vid dessa ser man direkt elektriciteten, man ser hur elektronerna stöta bort varandra, man kan ju rentav »ösa elektriciteten med slev».

Anser man sig kunna använda en så ytlig tolkning av ett experiment, skulle man lika väl kunna tala om de elektrodynamiska fenomenen på följande sätt:

När vi öppna kranen för elektriciteten (sluta strömmen), forsar elektriciteten genom lampan, så att dess tråd blir vitglödande; elektriciteten (elektronerna) slå mot trådens molekyler, så att dessa komma i mycket häftiga vibrationer.

Släppa vi en elektrisk ström genom en elektrisk motor, börjar den rotera och förmår uträtta arbete, alldeles som en vattenström kan få en turbin att arbeta.

Detta är ju minst lika konkret som någon framställning av elektrostatiken, och terminologien »elektrisk ström» bidrar ju kraftigt att väcka konkreta föreställningar.

Men inte duger dylikt på ett gymnasium, där eleverna skola lära sig tänka. Där får man nöja sig med att säga: orsaken till att tråden i den elektriska lampan efter strömslutningen blir vitvarm, att motorn går etc., kalla vi elektrisk ström. Namnet »ström» få vi motivera med det experimentella faktum, att verkan av denna orsak i en serie apparater är oberoende av i vilken ordning de inkopplas i en ogrenad ledning samt av experiment med grenade strömmar. Dessa likheter med verkningarna av en vattenström ha föranlett, att man givit orsaken till dessa fenomen namnet elektrisk ström, långt innan man kände något om det som strömmade (elektronerna).

Utan att låta den påpekade analogien mellan en ström vatten och en elektrisk ström få tjäna som bevis för några lagar för elektriciteten måste vi steg för steg logiskt utveckla dessa lagar och så uppbygga en teori.

Ställer man samma krav från logisk synpunkt på analysen av de elektrostatiska experimenten, kommer man till följande.

Vi se, att kulorna på de elektriska pendlarna repellera eller attrahera varandra. Orsaken till dessa fenomen kallas elektricitet. Ställa vi oss på elektronteoriens ståndpunkt, säga vi, att genom våra manipulationer resp. kulor fått över- eller underskott på elektroner. Tillskriva vi nu elektronerna lämpliga egenskaper, kunna vi lätt »förklara» de vanliga elektrostatiska fenomenen.

Av det sagda torde framgå, att de elektrostatiska och de elektrodynamiska fenomenen äro lika konkreta och lika ägnade för tankeväckande analys, utmärkta övningsexempel på hur man av en lätt iakttagbar verkan drar slutsatser om dess orsak och skapar teorier, som leda till nya försök o. s. v. Båda slagen fenomen kunna studeras genom kvantitativa experiment, som leda till lagar, vilka återgivas av enkla matematiska formler.

Av de elektrostatiska försöken får man Coulombs lag. Ingen tvivlar på denna lags giltighet, såvida man ej vill tillämpa den på atomernas delar. Huruvida den låter an-

vända sig där, torde ännu vara en öppen fråga. Ena dagen gäller den inte för detta fall, andra dagen påstås den vara användbar ända inpå atomkärnan.

Den begränsade tid, som står oss till buds i skolorna, tillåter oss endast meddela ett mycket begränsat antal kända lagar. Då vi skola välja på lagar, som endast ha teoretiskt intresse, och lagar, som både ha teoretisk och praktisk betydelse, synes det mig vara skolans plikt att välja de senare. Coulombs lag saknar praktisk användning. Alltså . . .

Grundlägga vi undervisningen i elektricitetslära med en sådan framställning av elektrostatiken, som leder fram till kvantitativa försök, och som avser att träna elevernas förmåga i kritiskt tänkande, måste vi genom ett kvantitativt försök sammanbinda de elektrostatiska och de elektrodynamiska fenomenen. Sådana försök äro svåra att utföra, och det tar mycken tid att få eleverna att fullt fatta deras innebörd (jfr denna tidskrift årg. 3, sid. 82—87 och årg. 5, sid. 172—178). Denna tid kan enligt min mening användas bättre.

Ett annat skäl till att studiet av elektrostatiken tills vidare bör väsentligt minskas, ja, rentav slopas ur våra skolprogram är att många lärare i sin behandling av detta kapitel äro bundna av den traditionella framställningen. Under deras skoltid var det klent beställt med diskussionen av ett skolförsök. Härom vittnar det i inledningen till denna uppsats anförda yttrandet.

I det föregående har från pedagogisk synpunkt ifrågasatts, om det är lämpligt att studera elektrostatik i våra skolor. Även en teoretiskt svag punkt må här vidröras.

Definitionen på elektrostatisk potential hos en konduktor förutsätter, att enhetsladdningen skall föras till den från en punkt med potentialen noll. Men var finna en sådan punkt? Någon absolut nollpunkt går ej att uppleta. Jordens potential varierar från punkt till punkt (jfr d:r Stenqvists uppsats i förra häftet av denna tidskrift). I vertikal led från jordytan förefinnas i allmänhet mångfaldigt större potential-

gradienter. Ute i världsrymden måste också uppträda potentialdifferenser. Från de små spänningsvariationer, som uppträda genom de elektromagnetiska vågorna, kan man ju bortse. Men hela moln av laddade partiklar utslungas från solen. Då dylika nå vår jord, förorsaka de i vår atmosfär polarsken och framkalla starka strömmar i jordytan. Nollpunkten för den elektrostatiska potentialen måste således vara konventionell, men är ännu ej internationellt fastslagen och torde ej vara värd sådan uppmärksamhet. Begreppet absolut elektrisk potential är således en matematisk fiktion, och denna är av tvivelaktigt värde för elementarfysiken. En fysiker kan ej tala om absolut elektrisk potential, endast om potentialdifferenser. Definitionen på potential i elektrostatiken lider för resten av så stora brister från mätteknisk synpunkt, att den ingalunda borde omnämnas i elementära läroanstalter. I vanliga elementära framställningar säges, att den elektriska potentialen mätes med elektrometern, men man anger i allmänhet ej, hur detta instrument skall graderas för att antalet grader skall vara proportionellt mot de rörliga delarnas potentiella energi. Att med tystnad förbigå denna svårighet är en mycket betänklig lucka i framställningen. Härtill kommer den ringa övning i att kombinera begrepp från olika delar av fysiken, som eleverna ha, då de börja elektricitetsläran. Det är då nog svårt för dem att fatta begreppet elektrisk potentialdifferens, utan att det sammankopplas med begreppet potentiell energi (eventuellt ock med begreppet torsion). Och det låter sig lätt göra att på elektrodynamisk väg med full logisk skärpa framställa begreppet elektrisk spänning (potentialdifferens) utan dylik sammankoppling med begrepp från andra delar av fysiken (se de ovan citerade uppsatserna i denna tidskrift).

Av det elektrodynamiska spänningsbegreppet framgår omedelbart, hur en voltmeter skall graderas och den definition på spänningsenhet, som därav framgår, blir just den nu gällande, genom 1908 års internationella kongress fastslagna enheten.

Anser man sig böra göra några kvantitativa statiska experiment, kan man, sedan voltmetern på nyss antytt sätt behandlats, gradera en elektrometer genom komparation med en voltmeter och är så rustad för önskade försök utan någon lucka i framställningen.

Har väl någon försökt att *direkt mäta det arbete* som kräves att föra en laddning från en punkt till en annan?

I elektrodynamiken talar man visserligen även om en nollpotential. Men detta begrepp har då ej någon central betydelse. Att en ledare från den synpunkten har nollpotential betyder endast, att det ej existerar någon spänning mellan den och jordytan på den plats, där ledaren befinner sig.

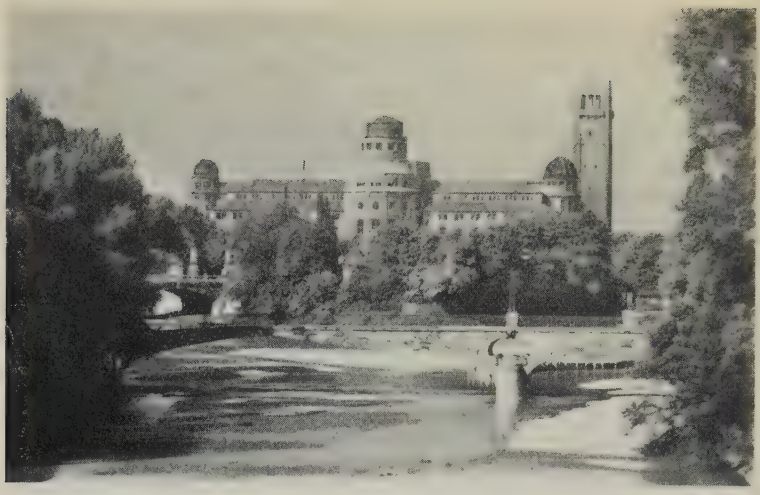
Elektrodynamiken har ej sådana teoretiska och mättekniska brister som elektrostatiken. Varför då ej tills vidare slopa elektrostatiken eller åtminstone inskränka dess studium till några enkla kvalitativa försök?

Det är vanligt, att begreppet elektrisk kapacitet införes i elektrostatiken, men det är minst lika lätt att motivera detta begrepp på elektrodynamisk väg, och man kan för billigt pris få härför tillräckligt stora konstanta och variabla kondensatorer. Våra elever syssla numera i stor utsträckning med kondensatorer i sina radioapparater. Här möter dem elektrodynamiska kapacitetsverkningar, och det är då förmånligt för dem, att de fått sina kunskaper om kapaciteten i samband med elektrodynamiken och ej vid behandlingen av elektrostatiken. Den internationella enheten för kapacitet, farad, med sina underavdelningar definieras också i anslutning till elektrodynamisk och ej elektrostatisk verkan.

Den, som en gång givit sina elever kapacitetsbegreppet på elektrodynamisk väg, återgår nog ej frivilligt till den elektrostatiska.

Inför man begreppen ledare och oledare i början av elektrodynamiken och ej i elektrostatiken, kan man visserligen ej då vidröra det vaga begreppet »halvledare». Men en något så när fyllig elementär elektricitetslära bör i

samband med behandlingen av motståndsmätningar omnämna de för våra elektriska anläggningar så viktiga isolationsmätningarna. Man får då tillfälle att framhålla relativiteten hos begreppet isolator, och man bör då ej försumma att omnämna, att gällande lag föreskriver, hur stort isolationsmotståndet minst skall vara, d. v. s. hur mycket ström, som får »läcka» genom isoleringen under givna omständigheter.



Deutsches Museum i München.

Av **JOHN LUNDBERG.**

Till de många museer, vilka sedan länge varit staden Münchens stolthet och utgjort en av dess förnämsta dragningskrafter, har under år 1925 kommit ännu ett, vilket är de gamla i mycket olikt och som betecknar ett alldeles nytt steg på detta område. Den 7 maj 1925 öppnades nämligen i en storslagen byggnad på en ö i Isar »Deutsches Museum von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik», som det fullständiga namnet lyder, med uppgift att »framställa den historiska utvecklingen av naturvetenskap, teknik och industri i deras växelverkan och att åskådliggöra deras viktigaste utvecklingsstadier genom typiska mästerverk».[1]

Idén till ett dylikt museum framlades första gången år 1903 av ingenjören Oskar v. Miller, som sedan också under

[1] Tvenne äldre museer av liknande art finnas, nämligen Conservatoire des arts et métiers, grundat redan på 1700-talet, i Paris och South Kensingtonmuseet i London, grundat 1876. Med avseende på fullständighet och moderna anordningar kunna dessa emellertid ej mäta sig med Deutsches Museum.

alla de mellanliggande åren blev den, som i främsta rummet arbetade för tankens förverkligande. Det var också hans 70-årsdag, man valt till museets högtidliga öppnande, och han är alltjämt ordförande i dess styrelse. Museet kunde naturligtvis endast förverkligas genom ett intensivt samarbete mellan representanter för staten och staden München med naturvetenskapsmän och teknici och i all synnerhet med målsmän för industrien, vilka sistnämnda i stor utsträckning skänkte de nu utställda föremålen. Det är säkerligen främst detta storindustriens intresse man har att tacka för, att museet, trots allt, som under krigs- och efterkrigsåren övergått Tyskland, likväl blivit verklighet, och en verklighet, där ingenting tycks ha sparats, utan lösen överallt varit, att endast det bästa är gott nog.

Själva museikomplexet är planlagt att bestå av dels en utställningsbyggnad, dels ett särskilt hus för bibliotek, läsesalar, kongress-sal m. m., bägge sammanbundna av smärre byggnader för förvaltning o. dyl. Av vad sålunda planerats, har hittills endast utställningsbyggnaden och den ena förbindelseflygeln uppförts, medan återstoden måst ställas på framtiden, och biblioteket inrymts i en äldre byggnad på vänstra Isarstranden. Den nämnda utställningsbyggnaden är emellertid redan den av imponerande dimensioner: den täcker i fem våningar en yta av c:a en hektar, och en fullständig vandring genom alla dess olika avdelningar har en längd av sexton kilometer!

Varken uppgiften om museets tillkomst, om dess ändamål eller om dess storlek ger dock någon föreställning om det för denna institution säregna. Detta är, skulle jag vilja säga, att de utställda föremålen i så stor utsträckning äro »i gång». Man ser t. ex. inte en elektricitetsmaskin utan vidare, utan man trycker på en knapp, varvid en — för åskådaren osynlig — elektrisk motor sätter maskinens skiva i rotation, och de med densamma förbundna instrumenten genast reagera: pappersremsorna i den välkända tofsen slå ut, klockspelet ringer o. s. v. — Tvenne stora konkava speglar stå uppställda med sammanfallande

axlar på några meters avstånd från varandra. I den enas brännpunkt är kulan till en strålningstermometer. Man trycker åter på en knapp: en liten elektrisk värmekropp i den andra spegelns brännpunkt börjar glöda, varpå det ej dröjer lång stund, förrän vätskan i strålningstermometern börjar stiga. — På hundratals ställen kan den besökande på detta sätt själv utföra experiment med iordningställda och oklanderligt fungerande apparater. En hel del andra, något mera besvärliga försök utföras, om man så önskar, av de ytterst tillmötesgående vaktmästarna — som äro strängt förbjudna att ta emot drickspengar. Synnerligen förbluffande verkar det när en av dem kliver upp på ett i avdelningen »Samfärdsväsen», uppställt lokomotiv och sätter det i gång med buller och brak! Visserligen rullar det inte framåt golvet; det är uppmonterat så, att det förblir på sin plats, fastän hjulen gå runt, men effekten är likväl ganska överraskande.

Detta är den ena av institutionens karakteristiska egenheter. Den andra består i mångfalden av originalapparater, med vilkas hjälp viktiga områden först utforskats. Sålunda finnas, för att blott nämna några få exempel, en av Otto v. Guerickes luftpumpar och hans Magdeburgska halvklot, diverse apparater, som använts av Ohm, när han fann den efter honom uppkallade lagen, Gauss' magnetometer, Röntgens första rör, Laues originalapparat, med vilken han visade röntgenstrålarnas natur o. s. v.

Utställningen är fördelad på följande avdelningar: A: Geologi, bergverk, hyttväsen och metallbearbetning, B: Kraftmaskiner, skeppsbyggeri, samfärdsel, tunnlar och broar, C: Flygteknik, matematik, fysik, kemi, D: Textilindustri, pappersfabrikation, boktryckeri, lantbruk, bryggeri- och brännerivåsen, astronomi, E (ännu ej färdig): Byggnadsmaterial, stadsbyggnadskonst, uppvärmning, belysning, gasteknik, elektroteknik. — Utom dessa avdelningar upptar den nu färdiga byggnaden även läsrum, där man för övrigt även kan köpa böcker i naturvetenskapliga och tekniska ämnen, samt restaurang.

De avdelningar, som torde göra det starkaste intrycket på lekmannen äro dels bergverksavdelningen med sina fullständigt efterbildade stenkols-, järn- och saltgruvor i byggnadens källarvåning, dels de utomordentliga modellerna av den ptolemeiska och den kopernikanska världsbilden i översta våningen, utförda och skänkta av Zeissverken i Jena. Särskilt den förstnämnda av dessa båda modeller, där man på ett »himlavalv» med 9 meters diameter ser alla fixstjärnornas och planeternas skenbara rörelser under dygnets och årets lopp framställda med hjälp av en sinnrik kombination av rörliga skioptikon i rummets mitt, är något minst sagt häpnadsväckande.

För en fysik- och kemilärare äro naturligtvis de avdelningar, som behandla dessa områden, de intressantaste. Dessa upptaga tillsammans så gott som hela våningen en trappa upp. Det för fysikavdelningen karakteristiska har jag redan berört; kemien åter har i huvudsak ordnats historiskt, och samlingarna äro till avsevärd del inrymda i tre laboratorier, ett alkemistiskt, ett från 1700-talet och ett från förra hälften av 1800-talet. Härpå följer en sal för den nyare tidens kemi, där man t. ex. finner en modell av Moissans första elektriska ugn, Habers originalapparatur för ammoniaksyntes, Pregls apparater för mikroanalys o. s. v. Efter denna sal följer en för »materiens byggnad», där man bl. a. finner en samling prov på de olika elementen.

Till den egentliga kemien ansluter sig den kemiska industrien med storartade modeller: Leblanc- och Solvay-sodafabriker, blykammaranläggning för svavelsyrefabrikation och — kanske mest framträdande — en sexton meter lång modell av en fabrik för ammoniak enligt Haber-Bosch.

Härefter följa salar för organisk kemi, där en hel vägg upptages av ett »stenkolsprodukternas stamträd», för farmaceutisk kemi, ordnad som ett apotek, och slutligen för födoämneskemi.

Ännu en avdelning, som ligger fysiklärarens intressen nära, är astronomien. Utom de redan nämnda stora modellerna finnas här en mängd modeller av observatorier

— bl. a. Tycho Brahes Uranienborg — vidare ett stort antal solvisare av olika konstruktioner och slutligen ett flertal kikare, alla tillgängliga för observationer. Främst uppmärksammar man kanske den av Fraunhofer 1838 byggda 15-tumsrefraktorn, ursprungligen uppställd i Pulkowaobservatoriet; den finnes i byggnadens stora mittelkupol, vars golv är höj- och sänkbart för att underlätta observationerna. Utom detta historiska instrument finnas i två andra mindre kupoler dels ett spegelteleskop av Goertz med 40 cm:s öppning och 120 cm:s brännvidd, dels en refraktor från Zeiss med 30 cm:s öppning.

Museibyggnadens 64 meter höga torn har man delvis utnyttjat för meteorologien. De stora siffertavlorna åt tre sidor äro inga urtavlor utan ange resp. barometerståndet, luftfuktigheten samt vindens riktning och styrka.

Det är naturligtvis icke möjligt att med några korta rader giva annat än en svag föreställning om Deutsches Museum. Av vad som i Sverige förekommit i utställningsavseende liknar det mest vissa partier av den industrihistoriska avdelningen på Göteborgsutställningen 1923. Säkert är emellertid, att München med denna institution skaffat sig en sevärdhet, som icke blott kan jämställas med, utan nog i vissa avseenden får sägas överträffa alla dess gamla attraktioner. Men att ses på en dag lämpar sig ej detta nya museum. En vecka torde bättre motsvara, vad som behövs. Den fysik- eller kemilärare, som har sina vägar åt södra Tyskland, kommer emellertid säkerligen icke att ångra, om han offrar några dagar på dessa storslagna samlingar.

Radioaktivitet och modern atomlära på gymnasiet.

Av EVA RAMSTEDT.

I en artikel »Atomfysiken — ett nytt moment i en omfattande kurs» (denna tidskrifts årg. 9, sid. 102) framhåller lektor E. HERLIN svårigheten men också vikten av att på gymnasiet medhinna behandlingen av det betydande kunskapsstoff, som tillkommit under de sista årtiondena och som ofta i hög grad fängslar lärjungarnas intresse. Detta gäller icke minst radioaktivitets- och den moderna atomläran, som på så många sätt bidragit att fördjupa vår uppfattning om materien och dess egenskaper.

Den förmånligaste tidpunkten för behandlingen av hithörande frågor är nog den, då såväl den egentliga kemikursen som de viktigaste delarna av elektricitetsläran, optiken och vågrörelseläran äro genomgångna och satserna om atomernas och energiens oförstörbarhet diskuterade. Man får då bäst fram det speciellt märkliga i de nyare rönen och ser dem i deras rätta proportioner. Då radioaktivitetsläran såväl historiskt som sakligt står i närmaste samband med elektriska urladdningar i förtunnade gaser, ligger det nära till hands att uppskjuta åtminstone den utförligare behandlingen av detta kapitel till samma tidpunkt. Det medför visserligen nackdelen, att man först då får fram själva bevisen för elektronernas existens, men behöver ej hindra, att man redan tidigare inför elektronbegreppet.

Emellertid blir nog alltid den tid, som anslås till radioaktivitets- och atomläran, ganska knapp, så att läraren måste inskränka sig till att ge endast en orienterande överblick över området. Men det är då av vikt, att denna blir så klar och åskådlig som möjligt. I det följande skall ges

några förslag till behandling av hithörande frågor i samband med en del enkla försök. De mognare eleverna kunna sedan hänvisas just till den av lektor Herlin angivna litteraturen och även till de i detta häfte sid. 115 anmälda böckerna av Anna Beckman och Arthur Haas. En mera utförlig behandling av själva radioaktivitetsläran finnes i Eva Ramstedt och Ellen Gleditsch, Radium och radioaktiva processer, Sthlm 1917 (i det följande citerad under benämning R. o. G.) och Hj. Tallqvist, Radioaktiviteten, Helsingfors 1924.

Becquerels upptäckt, att uran utsänder strålar, som gå genom tunna skikt av materia, åskådliggöres lätt genom att breda ut urannitrat eller annan uranförening (starkast verka oxiderna) på en i svart papper inlagd plåt och låta det ligga en vecka. Vid framkallning visar sig plåten svärtad. Lägges ett metallföremål mellan preparat och plåt, framträder det ljust mot mörk bakgrund. Toriums aktivitet visas på liknande sätt medelst en utbredd gasglödljusstrumpa, vilken som bekant förnämligast består av toriumoxid. Efter ett par veckors exponering är strumpans nätverk avtecknat på plåten.

Strålarnas förmåga att jonisera luften kan demonstreras genom att förbinda bladbäraren på ett elektroskop med en isolerad metallplatta några cm över en annan jordförbunden platta och införa preparatet mellan dem (se t. ex. Lemoine, Handledning i experimentell fysikundervisning, sid. 245). Ännu enklare är att endast utbyta elektroskopets kula mot en metallplatta och där placera preparatet. Vill man göra jämförande mätningar med olika föreningar, är det bäst att pulverisera varje preparat väl och med tillhjälp av några droppar sprit eller kloroform utbreda det i ett jämnt tunt lager på en rund metallskiva med något uppåtböjd kant (på t. ex. 6 cm diam.). Därtill åtgår på sin höjd 1 gr.

Elektroskopet bör helst projicieras, vilket låter sig göra, även om det består av en rund glasflaska. En starkare ljuskälla, en enkel större lins, som samlar ljuset och en

annan, som ger en bild av bladen på en några meter avlägsen skärm är allt, som behövs. Projektionen kan på så sätt utföras på själva experimentbordet. Saknar elektroskopet skala, kan en sådan anbringas på skärmen. Mätningarna utföras så att man bestämmer den tid (bekvämast med ett sportur), som bladen behöva för att genomlöpa ett bestämt antal skaldelar, om man ej nöjer sig med att blott konstatera, att bladen falla fortare eller långsammare. Behandlas litet pechblände på samma sätt, sker urladdningen mycket hastigare, vilket ger en god utgångspunkt för redogörelsen för upptäckten och framställningen av radium.

De *olika strålslagen* kunna påvisas först genom att lägga ett tunt papper över ett av de använda preparaten. Urladdningens hastighet minskas starkt, då α-strålarna absorberas av papperet. Men att några strålar tränga igenom framgår av de nyss relaterade fotografiska försöken. Ett radiumpreparat på 0,1 mg radium eller mer, inneslutet i ett tunt glasrör, urladdar elektroskopet ganska hastigt. Inlägges röret i en blykapsel med 1 mm tjocka väggar, visar elektroskopet, att även då en ringa procent av strålningen tränger igenom. Sammanställas dessa försök med strålarnas uppdelning i ett magnetiskt (schematisk teckning i alla läroböcker på området) eller elektriskt fält, kommer man fram till de tre strålslagen och deras natur.

Bland övriga strålverkningar är det av intresse att visa, hur särskilt preparerad zinksulfid, s. k. sidotblände, lyser i mörkret, om det är blandat med radiumsalt, men ej utan salt, förutsatt att det någon tid förvarats i mörker, så att zinksulfiden själv ej fosforescerar (se vidare sid. 107).

Av betydelse är att kunna påvisa *radiumemanationens bildning ur radium*. En lösning av 0,5—0,1 mg radium, som i form av klorid förvaras i en tillsluten tvättflaska (se R. o. G. sid. 73, fig. 38) eller annan liten kolv med motsvarande avloppsrör, avger emanation till luften ovanför. Ett i ena ändan slutet glasrör (förslagsvis 20 cm långt och 2 cm i diam.), avsmalnande i den andra, beklädes in-

vändigt med sidotblände genom att i röret införa några droppar av en gummilösning eller genomskinlig fernissa blandad med zinksulfid, som lämnas att torka. Röret, som förvaras i mörker eller omgivet av svart papper, befrias från luft med en vattensug, varefter den över radiumlösningen stående luften införes. Zinksulfiden börjar då genast lysa först svagare sedan starkare (allteftersom aktivt belägg bildas, se nedan). Åskådarna böra helst ha suttit någon stund i mörkret, innan försöket utföres, i synnerhet om radiummängden är liten. — Emanationen kan också påvisas genom sin joniserande förmåga och detta med en lösning på endast 10^{-4}—10^{-5} mg radium. Luft, som fått stå några dagar över lösningen, införes i en cylindrisk kondensator (se t. ex. R. o. G. sid. 18, fig. 12 nedre delen), vars inre isolerade del antingen direkt eller med en tråd sättes i metallisk förbindelse med elektroskopets bladbärare och uppladdas. De av radiumemanationen utsända α-strålarna orsaka urladdning, som tilltar i hastighet de första timmarna på grund av beläggets verkan. — I övrigt har emanationen alla en gas' egenskaper, men förekommer i så små kvantiteter, att man från 1 gr radium aldrig kan på en gång få mer än 0,6 mm^3 emanation.

En kropp, som förvarats en stund i emanationshaltig luft (t. ex. en glasbit, ett kopparbleck e. d.), visar, lagd på elektroskopets platta, joniserande verkan. Får kroppen hänga i slutet kärl strax ovanför en radiumlösning, behöver denna för tydlig verkan innehålla endast någon hundradels mg radium. På kroppen avsätter sig det osynliga och ovägbara *aktiva belägget*, som endast kan identifieras genom sina strålar. Gnides kroppen med smärgelpapper, går aktiviteten över på detta, nedlägges den i utspädd syra, löses belägget åtminstone delvis och lösningen är efter indunstning aktiv. Det aktiva belägget har en metalls egenskaper. Jonisationsförmågan för en i emanation aktiverad kropp avtar ganska hastigt och är efter några timmar så gott som försvunnen. Kommer kroppen åter i beröring med emanation, blir den på nytt aktiv.

Även ljusstyrkan hos zinksulfiden i radiumemanationsröret minskar med tiden ehuru mycket långsammare, så att den först efter en månad är helt borta. Samma avtagande skulle kunna iakttas med kondensatorn, om den emanationshaltiga luften lämnas kvar i den. Kondensatorn far emellertid ej väl därav på grund av bildning av aktivt belägg med lång livslängd. Den bör i stället omedelbart efter försöket utpumpas och spolas med frisk luft. — Den luft, som just förts in över en radiumlösning, är ej aktiv, men blir det mer och mer ju längre den står över lösningen, tills aktiviteten efter en månad uppnått ett konstant värde.

Ovanstående försök ge prov på hur aktiviteter bildas ur och skiljas från varandra samt, isolerade, så småningom avta och försvinna. Exemplen äro hämtade från radium, då detta ämne i allmänhet tilldrar sig största intresset. Vill man emellertid utföra en kemisk separation av aktiviteter, lämpar sig uran utmärkt. Till en lösning av urannitrat sättas ammoniak och ammoniumkarbonat i överskott, varefter man fotografiskt undersöker såväl fällningen som de ur lösningen bildade kristallerna. Den förra svärtar plåten kraftigt, men ej de senare, ehuru de ha kvar största delen av uranets joniserande verkan. Vid separationen utfälles uran *X*, som utsänder β-strålar, medan det α-strålande uran går i lösning. Med tiden återfå kristallerna sin fotografiska verkan, fullständigt först efter ett år, och fällningen förlorar sin.

Dessa och liknande försök var det som lågo till grund för den av Rutherford och Soddy år 1902 uppställda *transformationsteorin*, enligt vilken varje radioaktivt ämne *sönderfaller spontant* med en för ämnet karakteristisk hastighet, varvid atomfragment utslungas i form av α- eller β-partiklar och de ursprungliga atomerna övergå till atomer av annat slag. Här framkastades alltså för första gången tanken på en verklig atomsönderbrytning, men på samma gång, att den sker spontant utan all yttre påverkan enbart beroende på någon speciell inre egenskap hos

dessa atomer. Glänsande bekräftelse fick teorin, då RAMSAY och SODDY året därpå spektroskopiskt påvisade, att helium uppkommer vid radiumemanationens sönderfall, och RUTHERFORD år 1908, att α-partiklarna, sedan de förlorat sin positiva laddning, äro identiska med heliumatomer eller heliummolekyler.

Den stora hastighet, med vilken α-partiklarna ($\frac{1}{20}$—$\frac{1}{15}$ av ljusets) och β-partiklarna (upp mot 99,8% av ljusets) utkastas, förklarar deras kraftiga verkningar. Ett aktivt preparat bombarderas av sina egna strålpartiklar, varvid värme utvecklas. Ett gram radium ger per timme 135 gramkalorier, d. v. s. under sin livstid 400 000 gånger så mycket värme som en lika vikt kol. Här rör det sig alltså om energimängder av en helt annan storleksordning än dem, som äro i verksamhet vid vanliga kemiska processer, och det är uppenbart, att liknande energimängder skulle vara nödvändiga för att kunna *framkalla* en atomomvandling eller påverka en sådan.

Att säga några ord om radiums egen omvandlingstid, dess halveringstid, 1 600 år, samt härstamning från uran är nödvändigt för att klargöra radiums förekomst, även om man ej har tid att genomgå alla de olika omvandlingsformerna. Av intresse är även radiums slutliga omvandling till polonium och därefter till bly som slutprodukt. Av uran och radium bildas alltså under tidernas lopp bly och helium såsom ändprodukter, varför de mängder av dessa ämnen, som samlats i ett mineral kunna ge antydan om dettas ålder. — Ett intressant faktum att framhålla är överensstämmelsen mellan den experimentellt bestämda atomvikten och den, som beräknas ur det antal α-partiklar, som utsändas vid en transformationsserie.

Men ur radioaktivitetsläran har den *moderna atomläran* utvecklats vidare. Ett exempel härpå är zinksulfidens fluorescens under α-partiklarnas inverkan. Betraktar man en i mörkret lysande blandning av zinksulfid och radiumsalt med en liten lupp, som förstorar 10 à 20 gånger, ser man liksom ett virrvarr av ljusintryck. Blandningen måste för-

varas i mörker för att förhindra zinksulfidens egen fosforescens. Det är fördelaktigt att placera luppen i en kort metalltub, ihålig kork eller dylikt, så att det hela kan direkt stödjas mot preparatet. Detta skyddas då också för utifrån kommande ljus, så att rummet ej behöver vara absolut mörkt. Utspädes blandningen tillräckligt med zinksulfid, ser man lika bra som i ett spintariskop, om ej bättre, enstaka skarpa ljuspunkter, *scintillationer,* som blixtra till ett ögonblick. Varje sådan ljusblixt uppkommer genom en α-partikels, d. v. s. en atoms stöt mot zinksulfiden.

Försöket utföres lätt t. ex. med från firman Radiana i Paris inköpt s. k. »sel radioactif» märkt C. O., som för närvarande kostar 12 francs per gr. Detta lyser tydligt i mörkret och ger scintillationer i mängd. Några korn härav blandas väl med c:a 50 gånger så mycket zinksulfid, utröres med några droppar genomskinlig fernissa, strykes med en pensel på en bit svart papp eller dylikt och lämnas att torka under några timmar. Instruktivt är att göra i ordning preparat av olika koncentration; vid utspädning c:a 1 000 ggr kan man räkna antalet synliga scintillationer.

Av detta framgår, hur man vid känd stor utspädning kan räkna antalet α-partiklar, som utsändas av en viss mängd radium. Genom att även uppsamla och mäta den mängd helium, som α-partiklarna från en känd kvantitet radium bildar, beräknas antalet atomer eller molekyler i en cm^3 helium vid 0° och 760 mm och därmed antalet molekyler i vilken gas som helst. Ett mera påtagligt bevis för atomers och molekylers existens kan knappast tänkas, och man har här tillfälle att begrunda både de ofantligt stora tal, som ange antalet molekyler, t. ex. i en cm^3 gas $2{,}8 \cdot 10^{19}$, och de ofantligt små, som mäta atomernas dimensioner, 10^{-8} cm för en atomradie.

Man kan även få fram scintillationer genom att till zinksulfid sätta någon droppe av en svag radiumlösning eller blanda pulveriserat pechblände med zinksulfid i ungefär lika mängder. (I det senare fallet synes scintillationerna något svagare.)

Värdefullt är att framvisa några av engelsmannen C. T. R. Wilsons fotografier av α- och β-strålars banor. Något försök på dimbildning vid hastig utvidgning av fuktig luft har ofta gjorts redan förut. Därtill anknytes Wilsons anordning att framkalla kondensation på av strålar alstrade joner samt att genom samtidig belysning iakttaga och avfotografera strålbanorna. Utmärkt vackert framträda dessa i en nyligen av Wulf för skolbruk enligt Wilsons metod konstruerad apparat från Leybold's Nachfolger, beskriven i Zeitschr. f. d. physik. u. chem. Unterricht för 1923, sid. 245.

Ett enkelt försök, som dock endast visar under vilka förhållanden dimbildning äger rum, är följande: Ett vitt U-rör, diam. 2,5 cm och höjd 20 cm, slutet i ena ändan, fylles till hälften med vatten, så att det står ungefär lika högt i båda skänklarna. Därigenom instänges i den slutna skänkeln en viss kvantitet fuktighetsmättad luft. Den andra förbindes med en vanlig cykelfotpump, varmed den avstängda luftmängden sammanpressas i önskad grad. Den belyses dessutom med ett avgränsat ljusknippe, medan rummet för övrigt är mörkt. Några minuter efter kompressionen, då luften kan anses ha återtagit begynnelsetemperaturen, släppes pumpen, varvid luften under avkylning plötsligt återgår till sin ursprungliga volym och i vanliga fall kondensation sker på närvarande dammpartiklar. Lämnar man dessa tid att sjunka och avpassar förhållandet mellan den större och mindre volymen till mellan 1,3 och 1,4, visar sig vid utvidgningen endast några få stora droppar. Joniseras luften utifrån medelst ett radiumpreparat på några tiondels mg, äger kondensation rum i form av ett stort antal fina droppar, och är förhållandet mellan volymerna $> 1{,}4$, inträffar kondensation, antingen joner äro närvarande eller ej. Mellan två försök göres så långt uppehåll, att de bildade jonerna hinna försvinna. I Wilsons och Wulfs apparater bortskaffas jonerna med ett elektriskt fält.

Men även om man ej har tillfälle att utföra dessa demonstrationer, bör man visa de Wilsonska fotografier, som

finnas avbildade i tillgänglig litteratur, t. ex. Gleditsch sid. 26, där figurerna 9—10 väl illustrera, hur α-partikeln går fram några centimeter i luften, vanligen i alldeles rak bana, utan att påverkas av de tiotusental av atomer den genomtränger på sin väg. Fig. 11 ger dessutom en god jämförelse mellan α- och β-strålars verkningar. Nederst synes en α-partikels bana, det stora antalet droppar visar det stora antal joner den uppväcker på sin väg. Betydligt

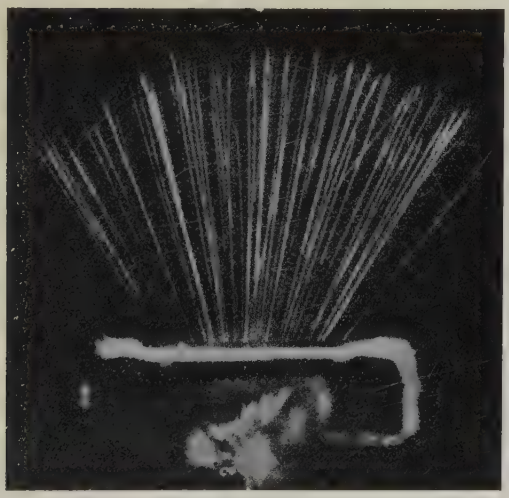


Fig. 1.

mindre är jonantalet i den övre krökta banan av en långsam β-partikel och ännu mindre i den mellersta banan för en hastig β-partikel. Närstående fotografier, tagna av prof. Lise Meitner i Berlin, ge prov på, att alla α-partiklar, utsända från ett och samma ämne, i detta fall polonium, hava samma räckvidd (fig. 1), och att α-partiklarna från två olika ämnen i toriums aktiva belägg ha en för varje ämne karakteristisk räckvidd (fig. 2). — Och så till sist ange de enstaka skarpa krökarna på fotografierna, att α-partiklarna någon gång utsättas för en ytterst kraftig påverkan, vilket föranlett Rutherfords och Bohrs antagande, att atomen

består av en positivt laddad kärna av mycket små dimensioner (radie en tiotusendel av atomens), som innehåller atomens egentliga massa, och elektroner, vilka i slutna banor kretsa kring kärnan till ett antal så stort att deras sammanlagda negativa laddning neutraliserar kärnans positiva.

För att ge en mera konkret bild av de beräknade atommodellerna kan man visa t. ex. de schematiska teckningar, som åtfölja Holst och Kramers: Bohrs atomteori (delvis avbildade i Kosmos, årg. 1923, sid. 47 och 48).

Fig. 2.

Av dessa framgår bl. a., hur glest elektronerna tänkas förekomma i atomerna, att väteatomen består av en kärna med *en* positiv laddning och *en* elektron, som rör sig kring kärnan, att om man ordnar ämnena efter stigande atomvikt, kärnans positiva laddning och därmed elektronernas antal ökas med en enhet för varje ämne. Därvid uppstå olika elektronanordningar, som ge upphov till ämnenas olika egenskaper. Om en elektron i sin bana avlägsnar sig långt från kärnan, avges den lätt, varvid återstoden av atomen bildar en positiv jon, om däremot en neutral atom upptar en elektron, uppstår en negativ jon. Av de yttre elektronernas rörelse och banor bestämmas ett ämnes

spektrum och en stor del av dess vanliga fysiska och kemiska egenskaper.

Radioaktiviteten däremot har sitt säte i själva kärnan, denna är det, som sönderspränges vid den radioaktiva atomens sönderfall. Då den minimala kärnan ligger väl skyddad innanför det yttre elektronhöljet, är det naturligt, att radioaktiviteten är oberoende av all utifrån kommande påverkan. Det enda, som kan tänkas tränga in mot och verka på kärnan, är just α-partikeln, som dels är ytterst liten (består av en heliumkärna) dels besitter den mest koncentrerade energimängd vi känna. Kommer α-partikeln nära kärnan, böjes den kraftigt åt sidan och samtidigt får den träffade atomen en stöt åt motsatt håll. I form av positiv jon rekylerar den med så stor hastighet, att den framkallar scintillation och uppväcker joner, så att även dess bana kan bli synlig. På Wilsons fotografier framträder rekylatomens eller rekylstrålens bana som en kort sporre och i fig. 2 är en sådan tydligt avtecknad. Ju lättare atomen är, desto längre blir banan. Vid rak stöt kan den träffade väteatomen, d. v. s. vätekärnan, tillryggalägga 4 gånger så lång väg som α-partikeln och därför lätt identifieras antingen medelst Wilsons metod eller scintillationsmetoden. På detta sätt har Rutherford första gången 1919 visat (se vidare G. Starck: Materiens struktur och Hans Pettersson: Grundämnenas sönderdelning, Kosmos, 1924), att vid bombardering av kvävgas med α-partiklar uppträda, utom de rekylerande kväveatomerna, ytterst sparsamt förekommande vätekärnor, som utkastats ur kväveatomernas kärnor. Detta betyder alltså en verklig spjälkning av kväveatomens kärna och är första gången, man bevisligen lyckats *åstadkomma en atomsönderspränging*. Sedan har man iakttagit utkastade vätekärnor från en hel del andra atomers kärnor, vilket ger stöd åt antagandet, att alla atomer äro uppbyggda av vätekärnor, kallade protoner, och elektroner. I modifierad form har man sålunda återkommit till den av Prout i början av 1800-talet framkastade hypotesen, att all materie är uppbyggd av väte som grundsubstans. Någon praktisk be-

tydelse lär icke denna artificiella atomsönderdelning få, ty även om alla α-partiklar från ett helt gram radium finge gå genom aluminium skulle på ett år utvecklas endast någon tusendels mm^3 vätgas.

Den här framlagda planen bör sakligt sett ej vålla någon svårighet att gå igenom även på latinlinjen. Något annorlunda ställer sig saken, om man kommer in på de undersökningar, som direkt beröra det periodiska systemet. Hur mycket som kan upptas t. ex. av isotopläran, av röntgenspektra eller av en mer ingående redogörelse för atomens struktur beror icke blott på den tid, som står till disposition, utan i hög grad på elevernas egna förutsättningar.

Radiumpreparat, innehållande en blandning av radium och bariumsalt, kunna erhållas till ett pris av 70 dollars per mg rent radium från Radium Belge, Bryssel. I radiumfabriken nära Antwerpen framställes för närvarande så gott som hela världens behov av radium ur pechblände från belgiska Kongo. — Skall ett preparat användas till lösning bör detta omtalas vid inköpet. Lösning sker i destillerat vatten med tillsats av svavelsyrefri saltsyra.

Pechblände kan köpas för c:a 15 öre per gr. Firman Radiana, som omtalats sid. 104, adress: Boulevard des Italiens 23, Paris, tillhandahåller »sels radioactifs» av olika kvaliteter från 12—55 fr. per gr (priset beroende på mängden radium) liksom zinksulfid (sulfure de zinc neutre vert) à 1 fr. per gr och lämplig fernissa. Den försäljer även en ask med 5 i olika färger fosforescerande salter för 20 fr. (egentligen en lysfärglåda), komplett med lysande fjärilar och en lysande skärm 25 fr.

Dessa saker tillhandahållas även hos P. A. Norstedt & Söner, skolavdelningen.

Till redaktionen insända böcker.

David Eugene Smith, *History of Mathematics, 2 vol. 1. General Survey of the History of Elementary Mathematics. 2. Special Topics of Elementary Mathematics*, Ginn and Cy, Boston, 1923 o. 1925. 596 sid. + 725 sid. $ 4 och $ 4,10.

Betydelsen av att vid studiet av en vetenskap även intressera sig för dess historia är allmänt erkänd, ej minst vad gäller matematiken. Även vid elementarundervisningen börjar nyttan av att krydda upp det torra kunskapsmeddelandet med intressanta historiska meddelanden och notiser att alltmera uppskattas. Detta framgår bl. a. av de moderna skollärоböckerna i ämnet, vilka i allmänhet skänka denna sida av saken vederbörligt beaktande.

Som standardverket över matematikens historia står alltjämt M. Cantors utförliga *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Vill man emellertid följa utvecklingen av något särskilt område eller någon speciell detalj, bereder anlitandet av detta arbete stora svårigheter på grund av dess historiska anläggning. Ett rationellt ordnande av stoffet, då det gäller elementarmatematiken, hava vi i J. Tropfkes förtjänstfulla arbete, *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung*. Vid Tropfkes behandling av ämnet uppstå svårigheter av motsatt slag. Det är ej lätt att här få de stora historiska överblickarna, då det gäller lands, folks och tiders olika insatser i matematikens utveckling. D. E. Smith har i sitt ovan citerade arbete lyckats skänka beaktande åt båda dessa synpunkter genom att i den första delen, *General Survey*, undersöka matematikens utveckling kronologiskt med hänsyn tagen till geografiska och etnologiska förhållanden, och i den andra delen, *Special Topics*, ordna materialet efter speciellt matematiska synpunkter.

Del I ger i olika kapitel utvecklingen under de stora tidsepokerna, och inom varje epok behandlas de olika folken och länderna, ofta jämförda med varandra med avseende på deras betydelse för matematikens utveckling. Del II börjar med ett kapitel om aritmetikens utveckling, åtföljt av ett särskilt kapitel, avhandlande de olika räknesätten. Därefter redogöres för mekaniska hjälpmedel, som under olika tider kommit till användning vid sifferräkning. I olika kapitel behandlas vidare geometriens, algebrans och trigonometriens historia. Ett intressant kapitel ägnas åt de vanliga aritmetiska och algebraiska problemtypernas historia: problem om cisterner, som kunna fyllas medelst rör, hastighetsproblem, handelsproblem o. s. v. samt en hel del problem av rent matematisk natur. En avdelning behandlar måttens historia, och i det sista kapitlet redogöres i korthet för »the calculus» eller infinitesimalkalkylen.

Det, som icke minst fängslar läsaren av detta värdefulla arbete, är de till ett antal av omkring 300 uppgående illustrationerna. Dessa utgöras av talrika facsimile av boksidor ur klassiska verk, gamla illustrationer, porträtt av de förnämsta matematici genom tiderna ända från Thales, grundläggaren av den matematiska vetenskapen i Grekland, fotografier av gamla matematiska instrument, av medaljer o. s. v., många tillhörande privata samlingar och ej förut publicerade.

För att göra arbetet mera lättläst har i texten undvikits orginalcitat och litteraturhänvisningar, vilka i stället återfinnas i de talrikt förekommande noterna. Efter varje kapitel uppställer förf. frågor och ämnen till diskussion, vilka avse att stimulera läsaren till vidare forskningar i ämnet.

Det höga priset på arbetet förminskar möjligheten för lärarna att i allmänhet skaffa sig detsamma. Dock borde lärarna genom skolbiblioteken givas tillfälle att hava tillgång till verket, vilket utan tvivel ej sällan kan vara dem till hjälp och nytta vid undervisningen. *Hj. O.*

Oscar Klein, *Vad vi veta om ljuset*, Natur och kultur, 1925, 2 delar tills. 294 sid. Kr. 6: — Häft. kr. 4:50.

Arthur Haas, *Naturen enligt den moderna fysiken* (övers. från tyskan), P. A. Norstedt & Söners förlag, 1925, 157 sid. Häft. kr. 3:75.

Anna Beckman, *Synligt och osynligt ljus, en populär framställning av den strålande energiens gåtor*, J. A. Lindblads förlag, 1926. Prisbelönt i en av förlaget anordnad tävlan. 135 sid. Häft. kr. 3:25.

Det första av ovan citerade arbeten innehåller många intressanta och roliga iakttagelser samt givande reflexioner. Särskilt de första kapitlen och enstaka delar av de övriga äro underhållande och verkligt populärt skrivna. Men i det hela måste nog sägas, att förf. överskattar förmågan av och intresset för abstrakt resonemang hos den läsekrets, till vilken förlagets böcker närmast vända sig. Den ingående förklaring, som där ges av de olika ljusfenomenen, i enlighet med den elastiska vågrörelseteorien, kan säkerligen vara till glädje för dem, som verkligen vilja fördjupa sig i de olika ljusteorierna. På den fysikaliskt mera otränade läsaren verkar den nog snarare förbryllande i synnerhet som på en del ställen, särskilt vid redogörelse för de Fresnelska interferenszonerna, några av de viktigaste bokstäverna i de förklarande figurerna bortfallit eller äro otydliga och beteckningarna ej enhetliga. Någon gång förefalla även de angivna försöken opraktiskt anordnade, t. ex. det över ljusets brytning i en glasplatta.

Dessutom verkar detta arbete på ett egendomligt sätt isolerat. Å ena sidan äro de praktiska tillämpningarna så gott som ej medtagna, ej en gång spektralanalysens stora betydelse för forskningen har framhållits. Å andra sidan nämnes intet om det synliga ljusets samband med andra företeelser av samma natur och ej ett ord om den elektromagnetiska ljusteorien. Endast på ett par ställen antydes, att uppfattningen av ljuset som en mekanisk vågrörelse ej

är till fyllest. Om detta beror på att förf., som ju särskilt vore skickad att behandla de moderna ljusteorierna, ämnat eller ämnar ge ut en tredje del av boken, borde detta antytts, eller annars hänvisning gjorts till annat håll.

Som det nu är, utfylles emellertid denna lucka av de båda övriga ovan angivna arbetena, av vilka *Synligt och osynligt ljus* av fil. lic. Anna Beckman mest direkt ansluter sig till föregående. Där innehålla de fyra första kapitlen en kortfattad men överskådlig framställning av delvis samma innehåll som docenten Kleins bok jämte redogörelse för spektralanalysens utveckling. Därefter kommer förf. in på den elektromagnetiska ljusteorien, ger en kort historik av de elektriska och magnetiska fenomenen samt deras inbördes sammanhang fram till Hertz' försök, varefter följer en redogörelse för röntgen- och γ-strålar, på dem gjorda våglängdsmätningar ända ned till Millicans »höjdstrålning».

I kap. 7 framlägges en förträfflig bild av den moderna fysikens ståndpunkt i fråga om strålningens uppkomst och orsaker. Där behandlas bl. a. Plancks kvanthypotes, Einsteins lag för den fotoelektriska effekten, Rutherford-Bohrs atommodell, ställd i samband med funna lagbundenheter i ämnenas spektra, optiska såväl som röntgenspektra. I slutkapitlet uppställas kort men klart själva grundproblemen i eterhypotesen och relativitetsteorien.

Stilen är alltigenom klar och redig, kanske någon gång väl sammanträngd för den mindre skolade läsaren, men alltid strängt logisk. De ganska talrikt förekommande figurerna äro enkla och instruktiva. Porträtt av de mera framstående forskarna på området höja bokens värde.

Som en särskild förtjänst vill anmälaren framhålla, att förf., fastän det gällt ett populärt arbete, ej ryggat tillbaka för att medtaga en del enkla formler. För alla dem, som ha nog matematisk underbyggnad för att förstå dessa, blir framställningen mycket fastare. Därvid kan framkastas, om det ej varit enklare, att i fig. 43, sid. 92 från den punkt, där d skär planet AD, draga vinkelräta linjer mot strål-

banorna AC och DC, varigenom vägskillnaden $2d \sin \varphi$ direkt erhållits. För att lättare jämföra olika små våglängder hade en enhetligare beteckning även varit önskvärd.

Det följdriktiga sätt på vilket de olika delarna sammanfogats i detta arbete, giver läsaren en förträfflig samlande överblick av ljusfenomenen i deras vidsträcktaste bemärkelse. Boken bör därför kunna bli av värdefull hjälp för mången fysiklärare samt även väl lämpa sig till självstudium för speciellt intresserade lärjungar liksom för alla dem, som önska få en inblick i forskningens nuvarande ståndpunkt inom det stora och viktiga strålningsgebitet.

Detsamma kan i stort sett sägas om professor Arthur Haas' bok *Naturen enligt den moderna fysiken*, översättning av andra reviderade upplagan av det tyska originalet, *Das Naturbild der Neuen*. Förf., som är framstående teoretisk fysiker, framlägger här i form av populära föredrag den nutida uppfattningen av en del aktuella spörsmål inom fysik- och stellarforskning. Även om genom denna framställningsform arbetet i sin helhet ej har samma överskådlighet som det föregående, är dock det i varje föredrag för sig uppställda problemet allsidigt och träffande belyst. I särskilda kapitel behandlas sålunda den elektromagnetiska ljusteorien, elektron-, kvant- och relativitetsteorierna. Synnerligen intresseväckande är kapitlet om molekylarstatistik liksom de i denna upplaga tillkomna föredragen om grundämnena, stjärnornas fysik och världsalltet.

Då formler ej förekomma och bilderna äro ganska fåtaliga, blir framställningen ibland mera omständlig än i fru Beckmans bok, men är annars klar och medryckande. Ett värdefullt komplement utgöra de i bokens slut förekommande klargörande anmärkningarna, åtföljda av litteraturanvisningar, ehuru man stundom önskat dem direkt inarbetade i texten. Översättningen synes väl utförd, även om någon gång det tyngre originalspråket skymtar igenom.

Eva Ramstedt.

Erik Nilsson, *Laborationsuppgifter i allmän fysik och värmelära*, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1926. 32 sid. Häft. kr. 1: 20.

Tom Moll, *Lärobok i fysik* (10:e uppl., reviderad av Ture Rudberg), III. *Magnetism och elektricitet*, samma förlag, 1926. 144 sid. Klotb. kr. 2: 75.

Karl Nordlund, Anna Sörensen, Sven Wikberg, *Arbetssättet i folkskolan*, III. *Räkning och geometri*, samma förlag, 1926. 245 sid. Häft. kr. 3: 80.

K. Asperén. *Huvudräkne-övningar*, 4:e granskade uppl., J. Beckmans förlag, 1926. 99 sid. Häft. kr. 1: 60.

K. Asperén, *Geometriska övningssatser*, 4:e oförändr. uppl., samma förlag, 1926. 96 sid. Häft. kr. 1: 60.

Emil Andrup, *Lärobok i räkning för kom. mellanskolans första klass*, Magn. Bergvalls förlag, 1926. 63 sid. + facit. Kr. 2: —.

Harald Yngve Larson, *Lärobok i plan geometri för gymnasiet*, motsvarande Euklides' femte och sjätte böcker jämte övningsuppgifter, Almqvist & Wiksells förlag, 1926. 116 sid. Kr. 3: 75.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

238) Av siffrorna 1 till och med 9 skola bildas två tal, vilkas produkt är den största möjliga. Vilka äro dessa tal?
X.

239) Att upprita en rätvinklig triangel, då man känner den ena katetens projektion på hypotenusan och hypotenusans överskott över den andra kateten. *Iter.*

240) Sök värdet av 1:a icke försvinnande $f^{n}(0)$ för

$$f(x) = \sin(\operatorname{tg} x) - \operatorname{tg}(\sin x).$$
X.

241) På hur många sätt kan talet 100 uppdelas i en summa av tre positiva hela tal? *Iter.*

242) Rektangeln av två sidor i en triangel är, som bekant, lika med kvadraten på bissektrisen till den mellanliggande vinkeln tillsammans med rektangeln av de båda segment, i vilka den tredje sidan delas av bissektrisen. Undersök, huruvida satsen är omvändbar. *Iter.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

243) Lös ekvationen

$$5^{2x} + 5^{-2x} + 8 = 5^{1+x} + 5^{1-x}.$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} x_{1,2} = 0 \\ x_{3,4} = \pm 0{,}598. \end{cases}$$

244) Lös ekvationen

$$\cos 2x = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

$$\text{Svar: } \begin{cases} x = 135° + n \cdot 180°, \; x = n \cdot 360° \\ x = 270° + n \cdot 360°. \end{cases}$$

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar godhetsfullt kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

245) I en rak, ihålig cylinder nedläggas tre lika klot, vilkas radier äro hälften av cylinderns radie. Hur hög måste cylindern minst vara för att ingen del av det översta klotet skall sticka över dess kant? Cylinderns radie$=r$.

Svar: $\frac{r}{2}(2+\sqrt{2})$.

246) Drag en korda i en cirkel parallell med en given tangent till cirkeln så, att om perpendiklar från kordans ändpunkter fällas mot tangenten, diagonalen i den så bildade rektangeln blir lika med cirkelns diameter.

247) Bestäm på en triangels median en punkt, sådan att summan av kvadraterna på avstånden till de tre hörnen blir ett minimum. Svar: Tyngdpunkten.

248) En rät linje (längd$=l$) rör sig så, att dess ena ändpunkt alltid befinner sig på y-axeln och dess andra ändpunkt alltid på cirkeln $x^2+y^2=l^2$. Sök orten för den punkt som delar linjen i förhållandet $m:n$.

Svar: Ellipsen $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{(m+2n)^2}=\frac{1}{(m+n)^2}$.

Lösningar till uppg. 197, 198, 209—211.

197) *$ABCD$ är en i en given ellips inskriven parallellogram, vars sidor äro parallella med ellipsens lika långa konjugatdiametrar. Sök orten för hörnen i den parallellogram, som bildas av ellipsnormalerna i punkterna A, B, C och D.*

X.

Lösning I. Låt ellipsens ekvation vara

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

och koordinaterna för två på varandra följande hörn i den inskrivna parallellogrammen (x_1, y_1) och (x_2, y_2). Vinkelkoefficienterna för kordan mellan dessa punkter och för dennas diameter äro då respektive

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\pm\frac{b}{a}, \quad \frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\mp\frac{b}{a},$$

varav

$$\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{y_2-y_1}{x_1-x_2}=\frac{y_1}{x_2}=\frac{y_2}{x_1}=\pm\frac{b}{a},$$

och således

$$\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{b^2}{a^2}.$$

Betecknas koordinaterna för skärningspunkten mellan normalerna i kordans ändpunkter med (x, y), har man

$$\frac{a^2}{x_1}\cdot x-\frac{b^2}{y_1}\cdot y=\frac{a^2}{x_2}\cdot x-\frac{b^2}{y_2}\cdot y=c^2,$$

varav

$$\frac{a^2x(x_2-x_1)}{x_1x_2}=\frac{b^2y(y_2-y_1)}{y_1y_2},$$

och således

$$\frac{y}{x}=\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{y_1y_2}{x_1x_2}\cdot\frac{x_2-x_1}{y_2-y_1}=\pm\frac{a}{b}.$$

Hörnen i den av ellipsnormalerna bildade parallellogrammen ligga således på de båda diametrar, som äro vinkelräta mot var sin av ellipsens lika långa konjugatdiametrar.

Lösning II. Vi betrakta en godtycklig korda z i ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Kordans pol antas vara $P(x_1, y_1)$. Skärningspunkten mellan normalerna i kordans ändpunkter ligger på en cirkel genom sistnämnda punkter och polen P; närmare bestämt, i den polen P diametralt motsatta punkten på nämnda cirkel. Ekvationen för denna cirkel kan lätt uppställas. För detta ändamål taga vi på nämnda cirkel en godtycklig punkt $Q(x_2, y_2)$. Ekvationen för ett kägelsnitt genom de punkter, i vilka ellipsen (1) skäres av tangentkordorna till P och Q, är

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1+k\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)\left(\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}-1\right)=0 \quad . \quad . \quad (2)$$

I denna ekvation ingå tre obestämda konstanter k, x_2, y_2. Vi föreskriva nu först, att kägelsnittet skall gå genom punkterna P och Q. För detta ändamål behöva vi endast disponera över en av de tre obestämda konstanterna, i det att

villkoret för att P och Q skola ligga på (2) befinnes vara

$$1+k\left(\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}-1\right)=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Genom villkoret (3) är k bestämd för godtyckliga värden på x_2 och y_2. Vi förfoga nu över de två återstående obestämda konstanterna på sådant sätt, att kägelsnittet (2) blir en cirkel. Härför erfordras endast, att xy-termen försvinner och att koefficienterna för x^2 och y^2 bliva lika. De nya villkoren bliva således

$$x_1y_2+x_2y_1=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{kx_1x_2}{a^4}=\frac{1}{b^2}+\frac{ky_1y_2}{b^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Härmed äro samtliga obestämda konstanter disponerade och ekvationen för cirkeln genom P och ändpunkterna av kordan z fullständigt bestämd.

Vi betrakta nu särskilt det fallet, att P ligger på någon av ellipsens lika långa konjugatdiametrar. Då är

$$\frac{y_1}{x_1}=\pm\frac{b}{a}$$

och på grund av (4) $\quad \frac{y_2}{x_2}=\mp\frac{b}{a}$,

således $\quad \frac{y_1y_2}{x_1x_2}=-\frac{b^2}{a^2}$

eller $\quad \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=0.$

På grund av (3) får man då $k=1$. Cirkeln (2) går i detta fall genom ellipsens medelpunkt, varav följer, att den punkten P diametralt motsatta punkten på cirkeln (normalernas skärningspunkt) ligger på den diameter, som är vinkelrät mot kordans z diameter.

Anm. Orten för skärningspunkten mellan normalerna i ändpunkterna av parallella ellipskordor är i allmänhet en hyperbel.

Lösas villkorsekvationerna (3), (4) och (5) med avseende å x_2, y_2 och k, erhålles

$$x_2=\frac{c^2x_1}{x_1^2+y_1^2},\quad y_2=\frac{-c^2y_1}{x_1^2+y_1^2},\quad k=\frac{a^2b^2(x_1^2+y_1^2)}{b^4x_1^2+a^4y_1^2}.$$

Genom insättning av dessa värden på x_2, y_2 och k i (2) erhålles efter utveckling

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

där

$$D=-\frac{b^2x_1(x_1^2+y_1^2+c^2)}{b^2x_1^2+a^2y_1^2},$$

$$E=-\frac{a^2y_1(x_1^2+y_1^2-c^2)}{b^2x_1^2+a^2y_1^2},$$

$$F=\frac{c^2(b^2x_1^2-a^2y_1^2)}{b^2x_1^2+a^2y_1^2}.$$

Då cirkeln går genom punkten (x_1, y_1), måste ekvationen kunna bringas under formen

$$(x-x_1)(x-\alpha)+(y-y_1)(y-\beta)=0,$$

där (α, β) är den punkt på cirkeln, som ligger diametralt motsatt punkten (x_1, y_1), således just skärningspunkten mellan normalerna i ändpunkterna av kordan z. Man finner

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{c^2x_1(b^2-y_1^2)}{b^2x_1^2+a^2y_1^2},\\ \beta&=\frac{c^2y_1(x_1^2-a^2)}{b^2x_1^2+a^2y_1^2}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(6)$$

Vi antaga nu, att kordan har en given riktning, bestämd av vinkelkoefficienten m. Diameterns vinkelkoefficient är då

$$\frac{y_1}{x_1}=-\frac{b^2}{a^2m}=m_1.$$

Ur (6) erhålles

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{x_1^2-a^2}{b^2-y_1^2}=\frac{x_1-\dfrac{a^2}{x_1}}{\dfrac{b^2}{y_1}-y_1},$$

således, om beteckningarna α, β nu utbytas mot x, y,

$$\frac{b^2}{y_1} \cdot y - yy_1 = xx_1 - \frac{a}{x_1} \cdot x$$

eller

$$\frac{a^2}{x_1} \cdot x + \frac{b^2}{y_1} \cdot y = xx_1 + yy_1 = \lambda c^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

där vi för enkelhetens skull infört beteckningen

$$\lambda = \frac{b^2x_1^2 - a^2y_1^2}{b^2x_1^2 + a^2y_1^2} = \frac{a^2m^2 - b^2}{a^2m^2 + b^2} = \frac{m + m_1}{m - m_1}.$$

Genom multiplikation av de båda första leden i (7) erhålles

$$\left(\frac{a^2}{x_1} \cdot x + \frac{b^2}{y_1} \cdot y\right)(xx_1 + yy_1) = \lambda^2 c^4,$$

vilken ekvation kan bringas under formen

$$(x - my)(x + m_1 y) = (\lambda ce)^2,$$

där e betecknar ellipsens excentricitet.

Ekvationen föreställer en hyperbel.

Formlerna (6), de s. k. *desboveska* formlerna, vilka kunna ersättas med dubbelformeln

$$\frac{y_1 x}{b^2 - y_1^2} = \frac{x_1 y}{x_1^2 - a^2} = \frac{c^2 x_1 y_1}{b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2},$$

äro av stor nytta vid behandlingen av frågor rörande kägelsnittens normaler (för hyperbeln ändras b^2 till $-b^2$). Två olika, var för sig mycket eleganta härledningar av dessa formler återfinnas hos *Niewenglowsky*, Cours de géométrie analytique, tome II, Gauthier-Villars, Paris 1911, p. 197—199.

Iter.

198) *Att upprita en triangel, då man känner omkretsen, förhållandet mellan två sidor och bissektrisen till den mellanliggande vinkeln.*

Givet: v_a, $a + b + c = o$, $b : c = m : n$, $m > n$.

Konstr. Dela o i sträckorna o_1, o_2 så att $o_1 : o_2 = m : n$. Konstruera $w = \frac{n}{m} \cdot v_a$. Drag $AV = v_a$ och i dess fortsättning $VW = w$. Bestäm B på mittpunktsnormalen till AW, så att

$AB+BV=o_2$ (se nedan). AC BW skär BV i C. Ur konstruktionen följer omedelbart, att $\triangle ABC$ är den sökta.

Möjlighetsvillkor: $o_2 > v_a$, d. v. s. $\dfrac{n}{m+n} \cdot o > v_a$.

Bestämningen av punkten B kan återföras på uppsökandet av skärningspunkterna mellan en rät linje och en ellips definierad medelst foci och storaxel. I detta speciella fall har man emellertid

$$\begin{cases} AB+BV=o_2 \\ AB^2-BV^2=AM^2-\overline{VM}^2=v_a \cdot w, \end{cases}$$

där M är mittpunkten till AW.

Om alltså o_3 är fjärde prop. till o_2, w, v_a, följer

$AB-BV=o_3$ och $AB=\frac{1}{2}[o_2+o_3]$, $BV=\frac{1}{2}[o_2-o_3]$. *X.*

Även löst av *H—r*, *W.*

209) *För vilka heltalsvärden på a är* $\dfrac{a^4-a^3-8a^2+5a-9}{a^2+2a-3}$ *ett helt tal?* *X.*

Uttrycket kan skrivas under formen

$$a^2-3a+1-\frac{6(a+1)}{(a-1)(a+3)} \quad \ldots\ldots (1)$$

Sättes $a=x-1$, blir bråkuttrycket i (1)

$$y=\frac{6x}{x^2-4}.$$

För $x=0$ är $y=0$. För $x \neq 0$ får man

$$x^2-\frac{6x}{y}-4=0. \quad \ldots\ldots (2)$$

Diskriminanten till denna ekvation i x skall vara en exakt kvadrat, således

$$\frac{9}{y^2}+4=\frac{z^2}{y^2}$$

eller $$(2y)^2+9=z^2.$$

Sätta vi då

$$2y=\pm 2mn, \quad m^2-n^2=(m+n)(m-n)=3,$$

få vi $$m+n=3,\ m-n=1,$$
$$m=2,\ n=1,\ y=\pm 2.$$

Insättas dessa y-värden i (2), erhålles
$$x^2 \mp 3x=4,$$
varav $$x=\pm 1,\ \pm 4.$$

De enda möjliga värdena äro således
$$a=-5,\ -2,\ -1,\ 0,\ 3.$$
Iter.
Även löst av *C. P.*

210) *Från en rörlig punkt P på en fix parabelnormal fällas de bägge andra normalerna PA och PB. Visa, att kordan AB är oföränderlig till sin riktning.* *X.*

Lösning. Betrakta vi punkten P i läget (x', y'), så bestämmas koordinaterna för de därigenom gående normalernas fotpunkter av parabelns ekvation
$$y^2=2px$$
i förening med ekvationen
$$p(y'-y)+y(x'-x)=0.$$

Elimineras x mellan dessa båda ekvationer, erhålles
$$y^3+2p(p-x')y=2p^2y'.$$

Betecknas ordinatorna för normalernas fotpunkter med y_1, y_2 och y_3, ha vi således
$$y_1+y_2+y_3=0.$$

Skall nu en av normalerna vara fix, så är summan av ordinatorna för de båda andras fotpunkter A, B konstant. Mittpunkten av kordan AB måste då ligga på en fast diameter och kordan AB således vara oföränderlig till sin riktning.
Iter.
Även löst av *C. P.*

211) *Diskutera fullständigt problemet: Sök orten för mittpunkterna av alla genom en fast punkt gående kordor till ett givet kägelsnitt.* *Iter.*

K det givna kägelsnittet, P den fasta punkten. Till en korda k genom P hör en diameter d i K; skärningspunkten

mellan dessa linjer genererar den sökta orten L. Om man i K:s ekvation ändrar den konstanta termen, övergår K i ett nytt kägelsnitt K, men d blir oförändrad, och L är alltså oberoende av värdet på denna konstant. Man kan nu alltid laga så, att K *går genom* P. L *är* då uppenbarligen *ett med* K *i skalan* 1 : 2 *med avseende på* P *likställt kägelsnitt*, som enligt sakens natur går genom P och centrum (ev. centra) till K.

A. K *ett egentligt kägelsnitt med centrum* O. Ligger P på en asymptot (a), utgöres K av asymptotparet a, b. L består av två linjer: a och en med b parallell linje genom PO:s mittpunkt, som övergår i b, då P längs a närmar sig O. Ligger P icke på en asymptot, äro K och K likställda med avseende på O i ändlig skala (som dock är rent imaginär, om K är en hyperbel och P ligger i konjugathyperbelns »fält»). Följaktligen äro K och L likställda med avseende på två punkter (på OP, en ev. oändligt avlägsen); de ha parallella asymptoter och L har centrum i OP:s mittpunkt.

B. K *en parabel.* K framgår ur K genom parallellförflyttning i diameterriktningen. L och K äro likställda på ett sätt i skalan 1 : 2; likställighetscentrum Q ligger på diametern genom P, som skär K i R, så att P är mittpunkten till QR.

C. K *två skärande linjer.* Dessa kunna utan ändring av L ersättas med en hyperbel, till vilken de äro asymptoter och man återkommer till A.

D. K *två parallella linjer.* K består även av två parallella linjer, som ha centrallinjen gemensam med K. L består av denna centrallinje och den därmed parallella linjen genom P. Detsamma gäller, om K skulle urarta till en dubbellinje.

Analytiskt erhållas samma resultat genom diskussion av L:s ekvation i följande form t. ex.

$$P\colon (0,0),\quad K\colon f(x,y)=0$$
$$\left.\begin{array}{ll} k\colon & y=mx \\ d\colon & f'_x+m\cdot f'_y=0 \end{array}\right\},$$

varav $$L\colon xf'_x+yf'_y=0.$$

I ekvationerna för K och L överensstämma andragradstermerna på faktorn 2 när. L och K ha alltså samma grad och samma oändlighetspunkter. L går vidare genom P och kontaktspunkterna A och B på de bägge tangenterna från P till K.[1] Om nu L sönderfaller, måste båda delarna vara ändliga räta linjer. Detta är möjligt, endast om en av K:s oändlighetspunkter, P och ena kontaktspunkten (A t. ex.) ligga i rät linje, d. v. s. P på en asymptot, vare sig K har distinkta eller sammanfallande oändlighetspunkter. Det är ock tillräckligt.

X.

Även löst av *C. P.*

[1] I överensstämmelse härmed kan ekv. för L ock skrivas $2f - f'_z = 0$, där $f'_z = 0$ är P:s polar.

Geometri utan vinklar.

Av HENRIK PETRINI.

I. Entydighetsaxiomet.

Den Euklideiska framställningen av geometrien grundar sig huvudsakligen på följande principer:

A. Mellan två punkter kan alltid en och endast en rät linje dragas.

B. Radierna i en cirkel äro lika stora.

C. En figur kan flyttas från ett läge till ett annat utan att undergå någon förändring.

Den första principen kan betraktas som definition på en rät linje.

Den andra kan anses vara definition på »lika stora» sträckor, när dessa ha en ändpunkt gemensam. Denna definition jämte *antagandet*, att Eukl. ax. 1 och 3 gälla för sträckor, äro tillräckliga för att bestämma begreppen $\begin{matrix} > \\ < \end{matrix}$ i fråga om sträckor vilka som helst, såsom uppvisas i Eukl. I: 1—3.

Den tredje principen utgör definition på ytan, å vilken figurerna äro uppritade, och denna yta blir härigenom bestämd som en yta av konstant krökning, vars grundformer äro *planet*, *sfären* och *pseudosfären*. För att principen A skall gälla för sfären, där »räta linjen» svarar mot en storcirkelbåge fordras att ingen sådan rät linje i figuren får vara $\geqq$ halva storcirkelbågen. Planets ytgrupp (planet, cylindriska och koniska ytor samt tangentytorna) särskiljes sedan från de andra två ytgrupperna därigenom, att parallellaxiomet skall gälla för densamma.

Alla satser i Eukl. I och III, som ej förutsätta parallellaxiomet, bilda en grupp av satser, som gälla för alla ytor

av konstant krökning, dock, i fråga om sfäriska figurer, med vissa inskränkningar beträffande figurernas storlek. Dessa satser kunna vidare helt naturligt uppdelas i två grupper: dels sådana, som i fråga om sfären gälla för räta linjer av storlek intill halva storcirkeln, och dels sådana, där de räta linjerna måste vara mindre än storcirkelkvadranten.

Såtillvida innehåller det Euklideiska systemet en ofullkomlighet, att vissa av den första gruppens satser (såsom Eukl. I: 20 och III: 7, 8) bevisas med tillhjälp av en av den senare gruppens (I: 16), varigenom de ej få den räckvidd, som helt naturligt bort tillkomma dem. Denna olägenhet skall i det följande undvikas genom att bevisa dem utan användning av någon sats, som tillhör den senare gruppen.

Men en rent logisk oklarhet vidlåder användningen i Eukl. I: 4 av principen C, i det att man här förutsätter, att en figur kan flyttas, utan att *vinklarna* ändra storlek. Ty det finns ingen antydan om vad man skall mena med att en vinkel är $\gtrless$ en annan vinkel annat än i det fall, att vinklarna helt eller delvis täcka varandra, då ax. 9 kan tillämpas. Det finns alltså ingen möjlighet att på ett *rent geometriskt* sätt avgöra, om en viss vinkel har ändrat storlek vid förflyttningen.

Tack vare Eukl. I: 1—3 står man däremot på en logiskt oangriplig fast punkt, om man utgår ifrån det andra kongruensfallet i stället för ifrån det första, ty då har man endast med räta linjers längder att göra, och dessa äro, som förut nämnts, fullt tillfredsställande definierade i fråga om begreppen $\gtrless$. Då man vid ordet »kongruent» är van att fästa begreppen »lika vinklar» och »lika ytor», men då det här endast är fråga om »lika linjer», vilja vi i det följande använda ett annat ord.

Definition. Om de tre sidorna i en triangel äro lika med var sin sida i en annan triangel, så sägas trianglarna vara sidenliga.

Anm. Man kunde nu vara benägen att definiera begreppet »lika stora» i fråga om vinklar så, att *de vinklar sägas vara lika stora, som stå emot lika stora sidor i sidenliga trianglar.* Det måste dock först uppvisas, att denna definition är entydig, så att en vinkel som är = en annan ej på samma gång kan vara > eller < denna. Om t. ex. (fig. 1) $AC = AC_1$, $BC = BC_1$, så äro trianglarna ABC och ABC_1 sidenliga. Enligt den nämnda definitionen på lika vinklar bleve då $\angle BAC = \angle BAC_1$, vilket strider emot ax. 9, enligt vilket $\angle BAC > \angle BAC_1$. Denna allmänna definition på lika vinklar gäller således ej för alla slags ytor, utan den kan endast gälla för sådana ytor, där två olika sidenliga trianglar icke kunna stå som i fig. 1.

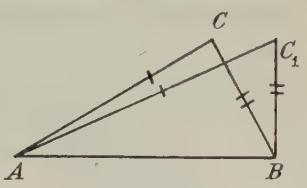


Fig. 1.

I stället för principen C skola vi därför att börja med antaga, att ytan uppfyller följande villkor:

Entydighetsaxiomet. Två sidenliga trianglar kunna icke stå så, att två motsvariga hörn sammanfalla men icke det tredje, om de äro vända åt samma håll om den gemensamma sidan.

Följdsats (fig. 1). *Två skilda cirklar* (*A och B*) *kunna ej råka varandra i mer än en punkt* (*C*) *på samma sida om medelpunktslinjen* (*AB*).

Anm. 1. Denna egenskap hos ytan tillkommer alla ytor med konstant krökning, ty den innehålles i Eukl. I: 7, som bevisas med användning av principen C.

Anm. 2. De »räta» linjerna kunna ritas hur krokiga som helst, blott två räta linjer aldrig ritas så, att de ha två punkter gemensamma. Likaså kunna cirklarna ritas hur ojämna som helst, bara de gå ihop; medelpunkten kan tagas var som helst inom cirkeln. Radien kan ritas hur krokig som helst, bara den inte råkar cirkellinjen i mer än en punkt. Slutligen kan ytan vara hur ojämn som helst.

Sats 1 (fig. 2). *Av alla de räta linjer, som kunna dragas till en punkt på en cirkellinje från en punkt, som icke är*

medelpunkten, är den störst, som går genom medelpunkten, och den minst, vars förlängning går genom medelpunkten, d. v. s. om M är medelpunkten till cirkellinjen, M_1 en godtycklig annan punkt samt P en godtycklig punkt på cirkellinjen, så är räta linjen $M_1P <$ räta linjen M_1A, då AMM_1B är en diameter i cirkeln M, men $M_1P > M_1B$.

I (fig. 2 a). Vi skola först bevisa, att M_1P icke kan vara $> M_1A$. Ty antag, att M_1P vore $> M_1A$. Göres räta linjen

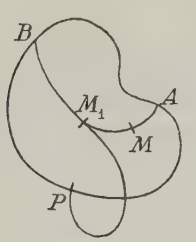


Fig. 2.

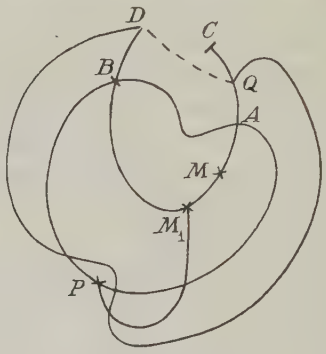


Fig. 2 a.

$M_1MC = M_1P$, så faller C utanför cirkeln. Tager man en punkt Q på AC mellan A och C, så blir $M_1Q < M_1P$. Göres $M_1D = M_1Q$, så faller D utanför cirkeln, eftersom $M_1Q >$ radien och $M_1B <$ radien. Tages nu M_1 till medelpunkt för en cirkellinje som går genom Q, så måste den även gå genom D, medan P måste falla utanför denna cirkellinje, eftersom $M_1P > M_1Q$. Men då kommer cirkellinjen M_1 att skära cirkellinjen M i två punkter, en på vardera sidan om P, båda belägna på samma sida om medelpunktslinjen QD, vilket strider mot följdsatsen till entydighetsaxiomet, således kan M_1P icke vara $> M_1A$.

II (fig. 2 b och c). M_1P kan ej heller vara $= M_1A$. Ty vore $M_1P = M_1A$, så tages M_1 till medelpunkt för en cirkellinje som går genom A, denna måste då också gå genom P. Då de båda cirkellinjerna inte kunna råka varandra i mer än en punkt på samma sida om medelpunktslinjen, så måste de båda cirkelbågarna PA råka varandra endast

i P och A. Om cirkelbågen M_1 faller innanför cirkellinjen M (fig. 2 b), så tages en punkt Q mellan P och A på bågen M. Då nu Q faller utanför cirkeln M_1, så är $M_1Q >$ radien M_1A, vilket strider mot fallet I. Faller åter bågen M_1 utanför bågen M, så tages en punkt Q mellan de båda bågarna (fig. 2 c). Man tager nu M_1 till medelpunkt för en

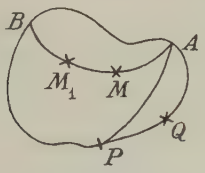


Fig. 2 b.

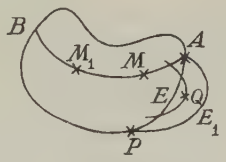


Fig. 2 c.

cirkellinje, som går genom Q. Denna kan ej råka bågen AE_1P, emedan radien $M_1Q <$ radien M_1E_1. Alltså måste den skära bågen AEP i två punkter, d. v. s. den skär cirkellinjen M i två punkter på samma sida om medelpunktslinjen, vilket är orimligt. Härav följer, att M_1P ej heller kan vara $= M_1A$, således är $M_1P < M_1A$.

Senare delen av satsen bevisas på analogt sätt, men här bör man skilja på två fall, allteftersom punkten M_1 faller innanför eller utanför cirkellinjen M.

Följdsats. Om två cirkellinjer råka varandra i en punkt på medelpunktslinjen eller dess förlängning, så tangera de varandra.

Sats 2 (fig. 3). *Om två punkter* (P *och* Q) *på en cirkellinje* (M) *sammanbindas med en punkt* (M_1), *som icke är medelpunkten, så är den linje* (M_1P) *längre* (*än* M_1Q), *som faller närmare den längsta linje* (M_1A), *som man kan draga från den sistnämnda punkten* (M_1) *till cirkellinjen*, d. v. s. om bågen $AP <$ bågen AQ, så är $M_1P > M_1Q$.

Ty tages M_1 till medelpunkt för en cirkellinje, som går genom P, så faller Q innanför cirkellinjen M_1 (sats 1 och entyd.-ax., följdsats), således $M_1Q <$ radien M_1P.

Följdsats. Sats 2 kan omvändas.

Anm. P och Q antagas här ligga på samma sida om MM_1.

Sats 3 (fig. 4). *Summan av två sidor i en triangel är större än den tredje.* Triangeln MPM_1 är given. Rita upp en

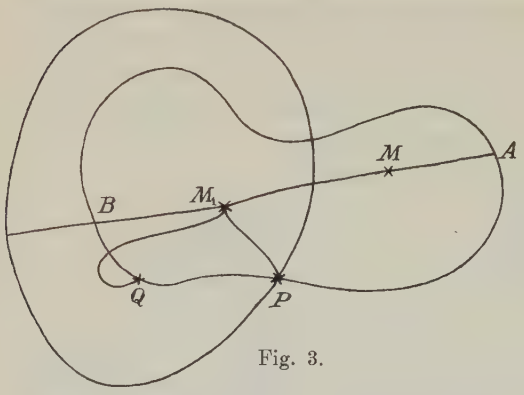


Fig. 3.

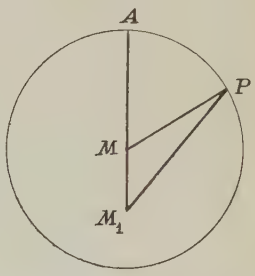
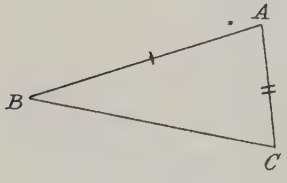


Fig. 4.

cirkel, som har M till medelpunkt och går genom P. Då är $M_1P < M_1A$ (sats 1) $= M_1M + MP$.

Följdsats. Om en sträcka är lika med en sida i en given triangel, så kan man alltid på sträckan som bas upprita en triangel, som är sidenlig med den givna triangeln. (Se Eukl. I: 22.)

Sats 4 (fig. 5). *Två trianglar ABC och $A_1B_1C_1$ äro givna, där $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ och $BC < B_1C_1$. Om man på*



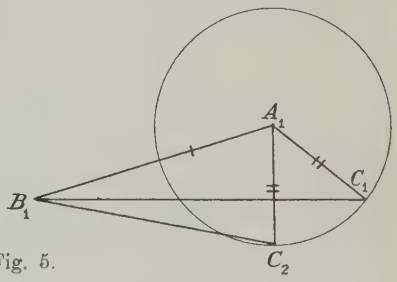


Fig. 5.

A_1B_1 som bas uppritar en med ABC sidenlig triangel $A\,B_1C_2$, så påstås, att A_1C_1 faller utanför denna triangel.

Ty uppritas med A_1 som medelpunkt en cirkellinje, som går genom C_1 (och C_2), så faller ändpunkten C_1 längre ifrån punkten B_1 än vad C_2 gör (sats 2, följdsats), alltså faller A_1C_2 mellan A_1B_1 och A_1C_1.

Följdsats. Denna sats kan omvändas.

Anm. Entydighetsaxiomet är en nödvändig förutsättning för den sid. 3, anm. nämnda definitionen på lika stora vinklar. Genom sats 4 är det motsvarande villkoret för en entydig definition på begreppet »en större (resp. mindre) vinkel» uppfyllt. Ty antag, att man definierar $\gtrless$ vinklar så, att om två vinklars ben äro parvis lika stora, och sammanbindningslinjen mellan de fria ändpunkterna på den ena vinkelns ben är $\gtrless$ den andra motsvarande sammanbindningslinjen, så är den förra vinkeln $\gtrless$ den andra vinkeln. Enligt sats 2 komma dessa definitioner att överenstämma med Eukl. ax. 9. För vinklar som icke delvis täcka varandra bli dessa definitioner entydigt bestämda, dock med den inskränkningen, att därvid alla vinklars ben skola väljas lika med två givna standardsträckor. Men med detta villkor blir det möjligt att jämföra alla vinklar med avseende på storleken enligt de nämnda definitionerna på $\gtrless$. Vidare inses omedelbart, att Eukl. ax. 1 då även gäller om vinklar, emedan det antages gälla om räta linjer. Däremot är det inte säkert, att med dessa definitioner Eukl. ax. 2 och 3 komma att gälla för vinklar. Slutligen är innebörden av Eukl. ax. 11 »alla räta vinklar äro lika stora» ännu icke klarlagd.

Det vore därför förhastat att redan nu införa vinkelbegreppet. För att en vinkels storlek ej skall bliva beroende av vinkelbenens längd, måste vi lägga ännu ett villkor på ytan genom antagandet, att ett mot principen C (sid. 2) svarande förflyttningsaxiom gäller för densamma. Sedan skola vi bevisa, att det förut använda entydighetsaxiomet kan härledas ur förflyttningsaxiomet, samt att Eukl. ax. 2, 3 och 11 kunna *bevisas* gälla för vinklar. Tydligt är, att förflyttningsaxiomet måste formuleras utan användning av begreppet vinkel.

II. Förflyttningsaxiomet.

Förflyttningsaxiomet (fig. 6). *Om man i två sidenliga trianglar sammanbinder motsvariga punkter på motsvariga sidor eller deras förlängningar med motstående triangelhörn, så bliva sammanbindningslinjerna parvis lika stora,* d. v. s. om $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ och $BP = B_1P_1$, så är $AP = A_1P_1$.

Följdsats. Om de två motsvariga punkterna P och P_1 sammanbindas med två motsvariga punkter Q och Q_1 på en annan

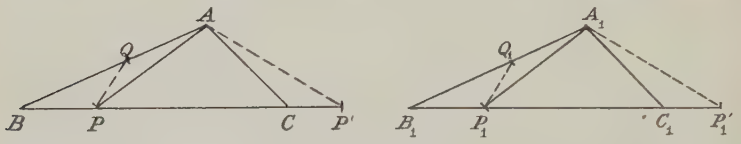


Fig. 6.

sida, så bliva PQ och P_1Q_1 lika stora, ty trianglarna ABP och $A_1B_1P_1$ äro sidenliga.

Anm. 1. Enligt denna följdsats bliva de förutnämnda definitionerna på $\begin{matrix}>\\<\end{matrix}$ i fråga om vinklar fullt entydigt bestämda oberoende av huru långa vinkelbenen äro.

Anm. 2. Tagas de motsvariga punkterna P' och P_1' på förlängningen av BC, resp. B_1C_1, så bliva trianglarna ACP' och $A_1C_1P_1'$ sidenliga. Detta svarar emot att sidovinklarna till lika stora vinklar äro lika stora.

Anm. 3. Följdsatsen svarar emot första kongruensfallet, vadan den här givna formuleringen av förflyttningsaxiomet täcker det i Eukl. I: 4 tacite förutsatta förflyttningsaxiomet (princip C, sid. 1).

Sats 5 (fig. 7). *Att dela en given sträcka* (AB) *mitt itu.* Konstruera på AB två likbenta trianglar ABC och ABD; CD råkar AB i E. Då äro trianglarna ACD och BCD sidenliga. Punkten E är motsvarig i dem båda, ty stycket CE är gemensamt, således $AE = BE$ (enl. förfl.-ax.).

Följdsats. För varje punkt P på CD eller dess förlängning är $PA = PB$.

Definition. En rät linje CD, vars alla punkter ligga på lika avstånd från en given sträckas (AB) ändpunkter, kallas sträckans mittpunktsnormal.

Följdsats 1. Om en rät linje (CD) är mittpunktsnormal till en given sträcka (AB), så är den även mittpunktsnormal till varje sträcka, som faller utefter den givna sträckan och har samma mittpunkt som denna. Ty trianglarna AEC och BEC äro sidenliga. Om nu EA_1 är $= EB_1$, så blir $CA_1 = CB_1$ enl. förfl.-ax. Den förra linjen (CD) säges vara *normal* till den senare (AB) utdragen, så att den betraktas som obegränsad.

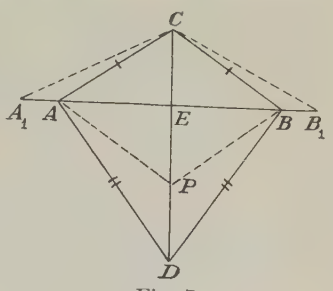


Fig. 7.

Följdsats 2. Om en rät linje (CD) är normal till en annan (AB), så är den senare räta linjen normal till den förra. Detta inses, om man gör $AD = AC$. Triangeln CAB blir då sidenlig med triangeln DAB, varav $EC = ED$, således AB mittpunktsnormal till CD.

Sats 6 (fig. 8). *På två par normaler kan man upprita två sidenliga trianglar med ett hörn i de resp. normalernas skärningspunkt.*

Antag att L och M äro ett par normaler, likaså L_1 och M_1. Gör $CA = CB = C_1A_1 = C_1B_1$. Tag en godtycklig punkt E

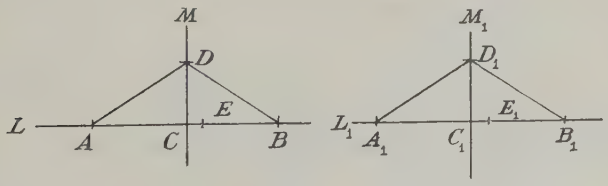


Fig. 8.

på CB och tag A till medelpunkt för en cirkellinje, som går genom E. Denna måste då skära M i en punkt D. Drag DA och DB. Gör $A_1E_1 = AE$ och konstruera på samma sätt D_1A_1 och D_1B_1. Då bli trianglarna ABD och $A_1B_1D_1$

sidenliga. Vidare är $AC = A_1C_1$, varav $DC = D_1C_1$ (enl. förfl.-ax.), således triangeln ACD sidenlig med triangeln $A_1C_1D_1$.

Anm. Sats 6 svarar mot Eukl. ax. 11 och är ett bevis för detta axiom.

Sats 7 (fig. 9 a och b). *En sträcka kan icke hava mer än en mittpunktsnormal.* Ty antag, att EC är en mittpunktsnormal till AB och att D ligger på en annan mittpunktsnormal till AB. Tag en punkt F på AB eller dess förläng-

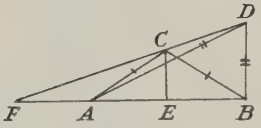


Fig. 9 a.

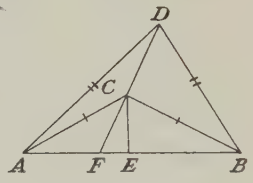


Fig. 9 b.

ning, så att D och F falla på var sin sida om EC. Då måste DF råka EC i en punkt C. Enligt antagandet är $CA = CB$, $DA = DB$. Härav följer, att triangeln CDA är sidenlig med triangeln CDB. Enligt förflyttningsaxiomet blir då $FA = FB$, vilket är orimligt.

Följdsats. Två olika sidenliga trianglar CDA och CDB kunna ej stå på samma bas CD, vara vända åt samma håll och hava de lika stora sidorna sammanstötande i samma ändpunkter av basen. Ty om så vore, skulle sammanbindningslinjen AB mellan de övriga vinkelspetsarna (fig. 9 a) hava två mittpunktsnormaler EC och ED, vilket strider mot sats 7.

Anm. Denna följdsats är identisk med entydighetsaxiomet, som alltså följer ur förflyttningsaxiomet. Ty beviset för sats 7 stödjer sig icke på det förra axiomet.

Sats 8 (fig. 10 a och b). *Om två fyrhörningar äro sidenliga och två motsvarande diagonaler äro lika, så äro även de båda andra diagonalerna lika stora,* d. v. s. om $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CD = C_1D_1$, $DA = D_1A_1$ och $AC = A_1C_1$, så är $BD = B_1D_1$. Ty gör $C_1E_2 = CE$ och $D_1B_2 = DB$. Då äro trianglarna ACD och $A_1C_1D_1$ sidenliga, där E och E_2 äro mot-

svariga punkter, således $DE = D_1E_2$ (förflyttningsaxiomet). Härav följer, att trianglarna AED och $A_1E_2D_1$ äro sidenliga, där B och B_2 äro motsvariga punkter, varav $AB = A_1B_2$. På samma sätt finner man, att $CB = C_1B_2$. I trianglarna $A_1B_1C_1$

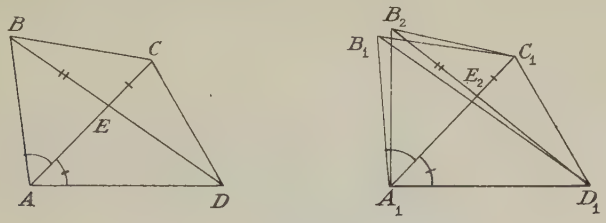


Fig. 10 a.

och $A_1B_2C_1$ är nu $A_1B_2 = (AB =) A_1B_1$, $C_1B_2 = C_1B_1$, således måste B_1 och B_2 sammanfalla (enl. sats 7, följdsats), d. v. s. $BD = B_1D_1$.

Anm. 1. Sats 8 svarar mot Eukl. ax. 2 och 3, vilka således nu äro *bevisade* att gälla för vinklar. Först nu äro de

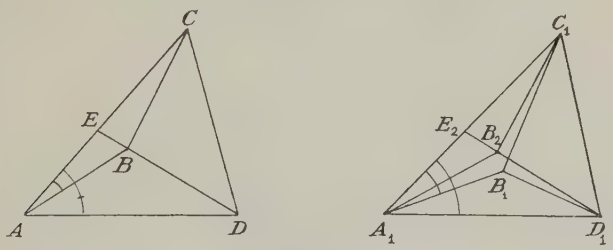


Fig. 10 b.

geometriska satser utredda, som behövas, för att man skall kunna få en entydig och fullt klar definition på begreppen $\gtrless$ i fråga om vinklar (jfr sid. 3).

Anm. 2. I fråga om sfären gälla alla de här bevisade satserna för sträckor, som äro mindre än halva storcirkeln, och för cirklar, vilkas diameter är mindre än halva storcirkeln.

En enkel trigonometrisk formel.

Av ELOF NORÉN.

Ur de allbekanta formlerna

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha,$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^2 \alpha - 3 \cos \alpha$$

erhålles

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = 3 - 4 \sin^2 \alpha,$$

$$\frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 4 \cos^2 \alpha - 3,$$

varav genom subtraktion

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2.$$

Vid härledningen av denna enkla och vackra formel bör man ej underlåta att med lärjungarna diskutera bråkens gränsvärden för $\alpha = 0°$, $90°$, $180°$ och $270°$.

Formeln kan enkelt åskådliggöras genom följande geometriska konstruktion:

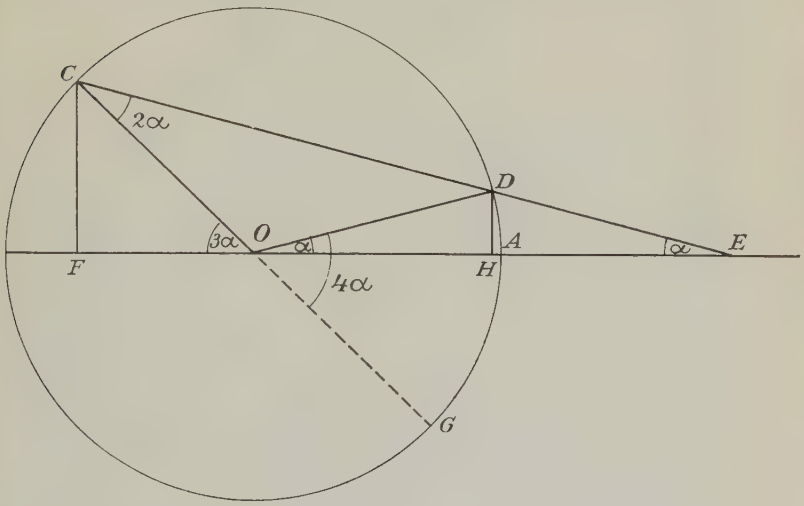
Avsätt i enhetscirkeln $\angle AOD = \alpha$, $\angle FOC = 3\alpha$.
Drag CD som utdragen skär OA i E.
Drag CF och DH vinkelräta mot OA.
Av beteckningarna i fig. framgår omedelbart, att $\angle DEH = \alpha$.

Man har

$FC = \sin 3\alpha$; $OF = \cos 3\alpha$; $HD = \sin \alpha$; $OH = EH = \cos \alpha$,

varav

$$FE = \cos 3\alpha + 2 \cos \alpha .$$



Av likf. trianglar fås, att

$$CF : DH = FE : HE ,$$

eller

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos 3\alpha + 2 \cos \alpha}{\cos \alpha} ,$$

eller

$$\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = 2 .$$

Några historiska data rörande vridspolgalvanometern.

Av HELMER BÄCKSTRÖM.

Bland alla de galvanometertyper, som under tidernas lopp sett dagen, torde de s. k. vridspolgalvanometrarna hava vunnit den största betydelsen i våra dagar. Den tidigare mest utbredda typen, »nål»-galvanometern, har måst vika på grund av sin stora känslighet för yttre störningar, vilken i våra dagar med dess talrika kraftledningar och av dem förorsakade ständiga fältväxlingar, måste betraktas som ett ganska allvarligt fel. Trots att olika galvanometerkonstruktörer sökt bota denna svaghet genom att omgiva nålgalvanometrarna med skyddspansar, har deras användning blivit mindre och mindre. Förutom vridspolgalvanometrarnas okänslighet för yttre störningar talar till deras förmån, att utslaget (utslagsvinkeln) även för mycket stora vinklar är proportionellt med strömstyrkan.[1] De tekniska s. k. precisionsinstrumenten äro därför till övervägande del byggda på vridspolens princip. På grund av denna vridspolgalvanometerns stora betydelse torde en kortfattad redogörelse för denna galvanometertyps utvecklingshistoria icke vara utan intresse för tidskriftens läsare. Det finnes så mycket större skäl att lämna en sådan historik, som vridspolgalvanometern inom den internationella lärobokslitteraturen (speciellt den svenska!) ofta går under namnet d'Arsonvalgalvanometern, eventuellt Deprez-d'Arsonvalgalvanometern, vilka benämningars berättigande det torde vara skäl att något närmare ingå på. Till följande korta

[1] Detta gäller likväl icke de äldsta vridspolinstrumenten utan endast de former, som utvecklats ur en av DEPREZ och d'ARSONVAL på 1880-talet angiven version av denna instrumenttyp.

översikt har förf. närmast hämtat materialet ur sin tidigare uppsats: »Ur d'Arsonvalgalvanometerns utvecklingshistoria», Fysisk Tidskrift, Köpenhamn 1918, häft. 1—2, vilken likväl huvudsakligen behandlar utvecklingen efter år 1880. Den redogörelse, som här kommer att lämnas rörande de allra äldsta vridspolsförsöken, är sålunda helt ny. Medan den tidigare uppsatsen även redogjorde för galvanometertypens användningsområden, teoretiska undersökningar rörande densamma m. m., skall här endast ett fåtal av de viktigaste utvecklingstyperna skildras. Förutom till den nämnda uppsatsen kan förf. även hänvisa till den utförliga litteraturförteckning, som medföljde hans uppsats: »Über ein Differentialgalvanometer nebst einer Untersuchung über Nullpunktsfehler bei Drehspulengalvanometern», Zeitschr. für Instrumentenkunde, Bd. 38, s. 173 etc., 1918.

År 1819 upptäckte dansken Örsted, att en magnetnål, som befinner sig i närheten av en strömledare, under vissa omständigheter gör utslag, när ström passerar ledaren. Redan häri hava vi tydligen nålgalvanometerns princip fullt skönjbar, och det dröjde ej heller så särdeles länge, förrän den praktiskt blev utnyttjad. Vridspolgalvanometerns princip kan sägas vara omvändningen av nålgalvanometerns. Medan vi vid nålgalvanometern (obs., att senare den svängande magneten ofta fått allt annat än »nål»-formigt utseende!) hava att göra med rörligt magnetsystem och fast strömledare, är ju vid vridspolgalvanometern ledaren rörlig (vridbar) och magneten fast. Det torde måhända icke vara ur vägen att i detta sammanhang påpeka, att vi på senare tid fått en ny galvanometertyp, byggd på samma princip med rörlig ledare och fast magnet, nämligen strånggalvanometern.

De första egentliga försöken med ett instrument av vridspolstyp gjordes 1820 av Örsted. Apparaten (fig. 1) består av ett smalt rektangulärt kopparkärl, som genom en kopparbåge är förbunden med ett inuti kärlet nedhängande zinkbleck. Kärlet fylldes med en vätska av något slag

samt upphängdes i en fin tråd. Närmades en magnet till apparaten, vred sig denna. Vi hava här tydligen med ett vridspolinstrument att göra, endast att »spolen» blott består av en enda slinga, nämligen kopparzinkbågen. Det egendomliga med »spolen» i fråga är därjämte, att det som strömkälla tjänande galvaniska elementet är fäst vid densamma. En tämligen likartad anordning konstruerades även av VAN DER BOSS i Utrecht år 1821.

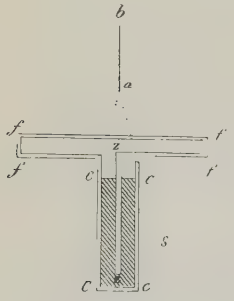


Fig. 1.

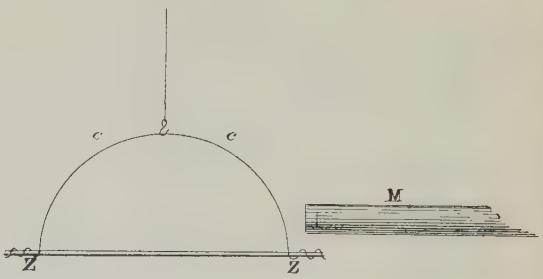


Fig. 2.

Något senare (1824) upptog WILLIAM STURGEON samma princip vid sina termoelektriska undersökningar. Apparaturen vid ett av dessa försök åskådliggöres av fig. 2. En halvcirkelformad kopparbåges (*cc*) ändpunkter förenas med en zinkstav (*ZZ*), och det hela upphänges i en fin otvinnad silketråd. En stavmagnet (*M*) placeras nära intill den på detta sätt åstadkomna »spolen». Som synes utgör emellertid det rörliga systemet samtidigt ett termoelement. Placeras alltså en liten spritlampa under det ena av föreningsställena koppar-zink, så erhålles ström i »spolen», och denna vrider sig. — Sturgeon gjorde »spolar» av olika form och under införande av olika metallpar.

Medan de hitintills skildrade instrumenten av Örsted och Sturgeon icke voro graderade och icke användes för mätändamål, alltså icke voro några galvano*metrar* i egentlig mening, så måste detta sägas om ett annat instrument, ävenledes konstruerat av Sturgeon för hans termoelektriska och elektrokemiska studier. Detta instru-

ment finnes avbildat i fig. 3 och har av sin konstruktör benämnts »electrodynamoscope» eller »comparing galvanoscope». Instrumentet består av en »spole» (*l*), exempelvis av samma slag som nyss, upphängd i en fin

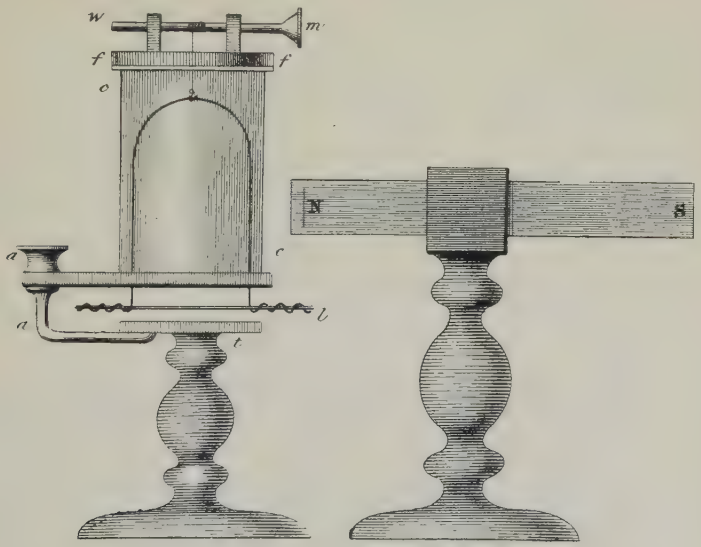


Fig. 3.

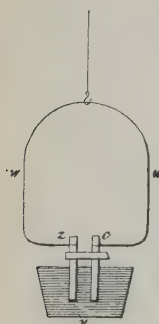


Fig. 4.

silkestråd vid en skruv (*m*), med vars hjälp »ekipagets» höjdinställning kan justeras. Under det svängande systemet befinner sig en *graderad skiva* (*t*), på vilken »spolens» utslag kan avläsas. Till skydd mot drag är »spolen» omgiven av en glascylinder (*c*). Vid instrumentets sida placeras en stavmagnet (NS). — Skola elektrokemiskt åstadkomna strömmar mätas, ersättes det å fig. 3 angivna termoelektriska »ekipaget» med det i fig. 4 schematiskt återgivna. Detta består av en båge av metalltråd, nedtill avslutad med tvenne stavar av olika metall, vilka sticka ned i kärlet *v*, varest en lösning av något slag befinner sig. Som prov på instrumentets känslighet angives, att med ett vridbart Ag-Zn-

system, neddoppande i utspädd syra, ej mindre än 40 à 50 graders utslag erhölls.

Tiden från 1820-talets mitt till år 1880 har icke från författarens sida gjorts till föremål för någon mer systematisk utforskning rörande vridspolsprincipens användning för galvanometerändamål. Så mycket torde dock vara säkert, att enstaka forskare tid efter annan byggt instrument av detta slag, men att vridspolinstrumenten likväl icke fått någon större utbredning. Bland kända konstruktörer av vridspolinstrument från denna period må nämnas Bain (1841), Robertson (1855), Thomson (1867), och Maxwell (1873).[1]

Av dessa blev likväl endast William Thomsons »siphon-recorder» av år 1867 av någon större betydelse. Den viktigaste delen av detta speciellt som mottagningsapparat för den transatlantiska telegrafiens räkning konstruerade instrument utgöres av en galvanometer. I ett magnetiskt fält befinner sig en liten lätt, fyrkantig trådspole. Ursprungligen åstadkoms fältet av en kraftig stålmagnet av Jamins typ, d. v. s. den var uppbyggd av en hop tunna lameller. Sedermera utbyttes denna mot en elektromagnet, som för att möjligast koncentrera fältet hade avspetsade poler. För samma ändamål placerades dessutom en liten järnkärna innanför spolen (fig. 5). Strömmen tilleddes ej genom upphängningstrådarna, som vid senare galvanometerkonstruktioner ofta varit brukligt, utan genom särskilda å figuren likväl ej utsatta tilledningstrådar. En liten kokongtråd överförde sedermera spolens rörelser till en liten sifon, vars ena skänkel befann sig i ett kärl med lättflytande bläck, medan den andra göt en kontinuerlig linje därav å en av ett urverk dragen pappersremsa. Instrumentet var alltså självregistrerande, vilket var av stor betydelse, då härigenom telegrafistens arbete under-

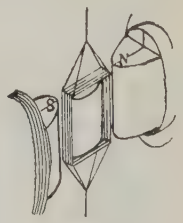


Fig. 5.

[1] Möjligen äro de här angivna årtalen något osäkra.

lättades i hög grad. Därför vann också denna »siphon-recorder» en storartad spridning.

Sådan var den ungefärliga ställningen vid 1880-talets inbrott. Vid denna tidpunkt sysselsatte sig fransmannen Marcel Deprez med ivriga motorstudier, i samband med vilka han jämte sin landsman A. d'Arsonval leddes in på galvanometerkonstruktioner. Till att börja med voro de av dem framförda galvanometrarna försedda med fast spole och rörlig magnet, men fr. o. m. år 1881 framträdde de även med vridspolgalvanometrar. Den första av dessa åskådliggöres av fig. 6.

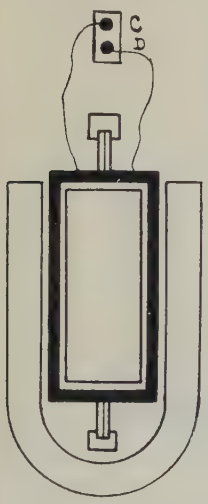


Fig. 6.

Mellan skänklarna på en liggande hästskomagnet befinner sig en spole (det svarta partiet av figuren), som är rörlig kring tvenne eggar. Innanför spolen är en järncylinder monterad. Strömtilledningstrådarnas ändar äro nedstuckna i ett par små kvicksilverkoppar (*C* och *D* å figuren). Denna galvanometer hade en jämförelsevis god känslighet. Deprez anger, att om flera personer hållande varandra i händerna förenade instrumentet med ett Daniellelement, så erhölls ett utslag på 15 à 20 grader.

Denna galvanometer skiljer sig ju föga från den av William Thomson vid siphonrecordern använda. Deprez anger också vid beskrivningen, att det huvudsakligen skulle vara proportionerna och detaljerna, framför allt det fullständiga utnyttjandet av magneten, som vore det nya.

Om sålunda denna Deprez-d'Arsonvalska galvanometer i princip knappast är något annat än en något modifierad form av den redan förut kända typen, så hava likväl de båda franska forskarna genom det energiska arbete, som de under de följande åren utförde på detta område, alltmer fäst uppmärksamheten vid denna instrumenttyp, och där-

igenom givit anledning till dess sedermera så storartade utbredning. Den närmaste förändringen gjordes av Deprez följande år, 1882. Han uppreste systemet: magneten, spolen och kärnan blevo sålunda vertikala (fig. 7). Spolen svängde ej längre om ett par eggar utan var spänd mellan tvenne silver- eller koppartrådar, vilka samtidigt tjänstgjorde som strömtilledare. Härigenom ökades känsligheten ytterligare, så att numera utslag erhölls redan för en ström av 10^{-7} amp. En annan fördel, som likväl även gällde den föregående galvanometern, var, att den vid strömbanans slutande blev aperiodisk.

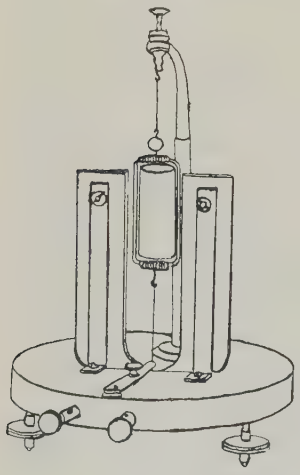


Fig. 7.

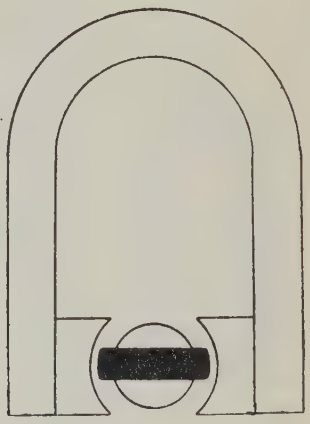


Fig. 8.

Sedermera kommo slag i slag nya modifikationer. Framför allt sökte man därvid åstadkomma fördelaktiga magnetformer och -kombinationer för att därigenom kunna pressa upp känsligheten.

Det viktigaste inlägget från denna tid lämnades dock av Deprez år 1884. Det instrument, som därvid beskrives, är i huvudsak likt det förut omtalade. Hästskomagneten är nu åter liggande, och *de vid dess poler placerade polskorna* (fig. 8) *äro ursvarvade, så att de tillsammans forma en vertikal hålcylinder*, i vilken en med visare försedd multi-

plikatorram svävar. Innanför denna en kärna, bestående av ett järnrör. Genom denna anordning, som längre fram blivit så gott som allenaförhärskande, erhölls ett likformigt fält, vadan också utslagen blevo proportionella med strömstyrkan ända till 120°, medan det vid de föregående instrumenten redan vid 4 à 5 graders utslag ej längre kunde vara tal om proportionalitet. Däremot var känsligheten tämligen ringa, vilket ju ej är förvånande, då det rör sig om visarinstrument.

Från år 1885 hava vi ett för teknikens behov avpassat instrument av W. C. Rechniewsky (visarinstrument), och året därpå offentliggjorde d'Arsonval en serie instrument, däribland ett par termogalvanometrar, vilka bilda utgångspunkten för en serie strålningsmätningsinstrument (Boys och andra).

Från denna tid härstammar också det engelska instrument, som blivit kallat Maxwell-Jolins »dynamogalvanometer». Hästskomagneten, som stod med skänklarna nedåt, var sammansatt av tre elementarmagneter. Likaledes var kärnan sammansatt av skilda stycken.

Även åtskilliga andra galvanometrar sågo dagen under 1880-talet, men det torde knappast vara behövligt att här redogöra för dem alla. Det är emellertid redan tydligt, att årtiondet karakteriseras av en synnerlig livlig verksamhet på detta område. Så gott som alla de omnämnda galvanometrarna från denna tid härstamma dessutom från Frankrike, som ju också gav signalen till den livliga verksamheten genom den av Deprez och d'Arsonval konstruerade typen från decenniets första år. Denna omnämnes f. ö. redan nu såsom klassisk, och än i dag benämnas ju ofta galvanometrar med rörlig spole efter dessa forskare. Det är därför icke underligt, om man ofta förbisåg, att redan före den Deprez-d'Arsonvalska galvanometerns framträdande liknande instrument blivit konstruerade av äldre vetenskapsmän såsom Thomson, Maxwell och andra. Ett rent misstag i detta avseende gjorde sig J. Numro skyldig till, då han vid skildrandet av Maxwell-Jolins dynamo-

meter nästan stämplar denna som plagiat. Han skriver nämligen i Lumière électrique: »Nous avions déjà la dynamo-telephone de M. S. Thomson; Mm Maxwell et Jolin ayant dernièrement modifié le galvanomètre de Mm d'Arsonval et Deprez ont cru devoir le décorer du nom de dynamo-galvanomètre . . .» Och längre ned: »Il est à peine besoine de faire remarcquer que, à part la position renversée de l'aimant ce galvanomètre ne diffère en rien de celui qui est universellement connu sous le nom de galvanomètre Deprez-d'Arsonval.» Misstaget kunde naturligtvis icke göras opåtalt, utan konkurrenstidskriften L'électricien såg sig föranlåten påpeka, att Maxwell, »l'illustre savant anglais» dog redan 1879, d. v. s. två år före det Deprez-d'Arsonvalska instrumentet såg dagen, vadan det alltså från Jolins sida endast var en rättvis gärd åt den förste uppfinnaren att uppkalla sin modifikation av instrumentet efter honom.

Det var en brokig samling instrument, som under 1880-talet såg dagen, och man kan knappast värja sig från intrycket, att en viss planlöshet och nyckfullhet gjorde sig gällande vid denna massproduktion av olika galvanometer-konstruktioner. I det avseendet stå vi nu inför en vändpunkt. Visserligen framträda även under den kommande tiden då och då nykonstruerade instrument, det huvudsakliga arbetet nedlägges dock på att utforska de redan befintliga samt taga reda på de faktorer, som äro bestämmande för deras användbarhet. Därvid visar det sig, att ur 1880-talets kaotiska virrvarr av instrument har den ursprungliga d'Arsonvalska galvanometern utgått med segern, och det är detta instrument i den form, det erhöll av Deprez 1884 (cirkulärt ursvarvade polskor och koncentrisk cylinderformig järnkärna), som bildar utgångspunkten för de flesta framtida arbeten på detta område.

De följande årtiondena hava, som nämnts, huvudsakligen använts för teoretiska utredningar rörande vridspolgalvanometerns lämpliga byggnad, och dessa arbeten hava i mycket hög grad bidragit till ernåendet av den höga standard, som utmärka vår tids instrument. Att ingå på

alla dessa torde här icke vara lämpligt; i detta hänseende hänvisas till författarens tidigare nämnda uppsatser. Möjligen förtjänar dock påpekas, att handböckernas framställningar av dessa förhållanden i första hand bruka basera sig på arbeten av W. Jaeger och H. Dieselhorst.

Av stor betydelse har strävandet varit att åt tekniken och industrien skaffa enkla och lätthanterliga mätapparater. Därvid har huvudtanken icke varit att nå den största möjliga känsligheten utan den största möjliga enkelheten vid användningen. Härvid komma naturligtvis visarinstrument närmast i fråga, trots att visaren medför ökat tröghetsmoment och därmed även mindre känslighet. Då tröghetsmomentet i alla händelser sålunda måste bliva jämförelsevis stort, så har i allmänhet ej heller hänsyn tagits till spolformen. Några smala spolar förekomma sålunda knappast. Däremot har nästan undantagslöst radiellt och likformigt fält anordnats, för att proportionalitet skall råda mellan strömstyrka och utslag. Den Deprezska galvanometerformen av år 1884 är alltså även här grundläggande, och då detta instrument även hade visaravläsning, så torde det vara den första galvanometern med rörlig spole, där dessa praktiska synpunkter gjort sig gällande.

Mest av alla hava dock måhända de Westonska instrumenten bidragit till instrumenttypens framgång. Redan omedelbart efter deras framträdande erkändes deras överlägsenhet, och än i dag kallar man ofta de tekniska mätinstrumenten av vridspolstyp för Westonapparater, oaktat sedan dess en mängd olika firmor släppt talrika instrument av denna art i marknaden. Härpå skall likväl ej närmare ingås, då de äro varandra i stort sett alltför lika och dessutom äro alltför välkända. Det karakteristiska för dem är, att de hava visare och skala samt i allmänhet hava spolen lagrad medelst tvenne tappar, varvid riktkraften erhålles från fjädrar, som måste tillverkas av omagnetiskt material såsom fosforbrons. Vid instrument av större känslighet användes likväl upphängning i tunna metallband. En kombination av tapplagring och bandupphängning infördes

av M. Mohs för att spara lagren. Instrumenten äro ämnade för mätningar av antingen strömstyrkor eller spänningar samt direkt graderade. För att göra mätområdet vidare åtfölja dem dessutom särskilda shuntmotstånd eller tillsatsmotstånd. I vissa fall äro dessa förlagda till instrumentet självt, som då kan kombineras på olika sätt, ja man känner t. o. m. så kallade *universalapparater*, som efter behag kunna användas för mätning av strömstyrkor, spänningar eller motstånd (inlagd »brygg»-anordning).

För pedagogiskt bruk har en hart när oöverskådlig serie instrument byggts, baserade på vridspolsprincipen. Dessa instrument äro likväl i allmänhet nära besläktade med de tekniska instrumenten och skilja sig i allmänhet rätt oväsentligt från dessa.

*

Som sammanfattning av vridspolgalvanometerns historia må följande sägas:

Redan omedelbart efter upptäckten av elektromagnetismen finna vi vridspolprincipen fullt utbildad hos Örsted (1820), van der Boss (1821) och Sturgeon (1824). Den senare försåg sina instrument även med skala för utslagsvinkelns avläsning, varigenom verkliga galvanometeranordningar uppstodo. De följande decennierna ända till år 1880 hava att uppvisa en rad sporadiskt framträdande instrument enligt vridspolprincip. Viktigast av dessa var Thomsons »siphon-recorder», vilket instrument i konstruktionshänseende vida överträffade åtskilliga senare anordningar. Förtjänsten av att vridspolgalvanometern kom till vidsträcktare användning får nog till ej ringa del tillskrivas Deprez och d'Arsonval, vilkas intensiva konstruktionsverksamhet under 1880-talet bidrog att fästa uppmärksamheten vid instrumenttypen i fråga. Säkerligen var tiden också »mogen» för dessa nyheter, efter Thomsons och Maxwells tidigare arbeten. Efter år 1890 har ett tidvis ganska intensivt teoretiskt utredningsarbete lyft vridspolgalvanometern till dess nuvarande höga nivå.

Gå vi sedan till namnfrågan, så finna vi lätt att i den vetenskapliga originallitteraturen benämningen »vridspolgalvanometer» är förhärskande. Så förekommer tämligen genomgående i den tyska tidskriftslitteraturen ordet »Drehspulengalvanometern», medan engelsmän och amerikaner benyttja benämningen »moving coil galvanometers». Till och med i den franska litteraturen är den motsvarande beteckningen »galvanomètre à cadre mobile» synnerligen vanlig om ock, med hänsyn till landsmannen d'Arsonval, beteckningen d'Arsonvalgalvanometer ingalunda är sällsynt. Av den här lämnade historiken torde emellertid framgå, att vridspolprincipen ej uppfunnits av d'Arsonval utan av Örsted, Sturgeon etc., vidare att instrumenttypen blev fullt utbildad decennier före d'Arsonvals framträdande och till och med erhöll en storartad utbredning för telegraferingsändamål (Thomsons »siphon-recorder»). Ej ens införandet av järnkärnan innanför spolen tillkommer d'Arsonval eller Deprez; den fanns ju redan hos Thomson. Endast i fråga om den cylindriska formen på polskor och järnkärna hava de båda fransmännens arbete blivit bestående, varjämte deras initiativ bidragit till instrumenttypens framgång. Det kan alltså icke vara riktigt att uppkalla vridspolgalvanometrarna efter d'Arsonval eller Deprez med förbigående av samtliga deras föregångare. Beteckningen kan möjligen försvaras vid instrumenten med radiella fält, vilka ju äro de vanligaste, men leder lätt till misstag. Det torde därför vara lämpligt, att även de svenska läroböckerna begagnade sig av ordet *vridspolgalvanometer* i anslutning till den övervägande delen av den vetenskapliga litteraturen på området.

Förf. vill i detta sammanhang påpeka att icke i någon av de svenska läroböcker, han varit i tillfälle taga del av, benämningen d'Arsonvalgalvanometer använts på sådant sätt, att felaktiga tillämpningar äro uteslutna.

Om ljusets brytning i en plan vattenyta.

Av ANTON FRENDEL.

I. Utgångspunkter.

I sept.—dec.-häftet för år 1925 av denna tidskrift har Conrad Lönnqvist utrett frågan om den skenbara lägesändringen hos ett föremål, som befinner sig i vatten och iakttages av ett öga ovan vattenytan. Det gällde närmast att utröna förskjutningen i sidoled. En del läroboksförfattare t. ex. Grimsehl ange, åtminstone i illustrationsmaterialet, att föremålet tycks förflytta sig i riktning *bort från* åskådaren, medan andra, t. ex. Moll, ange en sidoförskjutning *mot* åskådaren. En del författare uppgivas nonchalera sidoförskjutningen och endast omnämna den vertikala. Lönnqvist bevisar nu, att en sidoförskjutning måste äga rum och detta i riktning *mot* åskådaren.[1]

I senaste upplagan av Chwolsons Lehrbuch der Physik (sid. 146 av band II: 2, utg. år 1922) intages samma ståndpunkt, och i en figur, som här, något förändrad, reproduceras (fig. 1), är den kurva $S_1S_2S_3L$ utritad, längs vilken bilden av punkten S angives förflytta sig, när infallsvinkeln successivt växer från 0° till brytningsgränsen (48,5°). Den bildar evolutan till en ellips och utgör en (virtuell) brännlinje. Låter man denna brännlinje rotera kring AS_1, så skär den ut en brännyta. Brännlinjens ena ändpunkt S_1 ligger på den

[1] Adjunkt Lönnqvist har kompletterat denna sin framställning i en till red. insänd artikel med i huvudsak samma synpunkter och resultat som föreliggande uppsats av adjunkt Frendel. Vi publicera den senare, vilken först kom oss till handa.

De i dessa artiklar framförda anmärkningarna mot en del läroböcker ha påtalats förr, ehuru de tydligen ej tillräckligt beaktats, bl. a. av Götting, Zeitschr. f. d. Phys. u. Chem. Unterricht Bd 9, sid. 235, 1896. Hithörande frågor behandlas i samma tidskr. av Schellbach (Bd 1), Szymánsky (Bd 2), Hahn (Bd 7); dock synas dessa förf. ej ha ägnat frågan en så ingående experimentell behandling som Frendel. *Red.*

normal, som drages genom föremålspunkten S mot vattenytan AQ och befinner sig på ett djup under vattenytan, som är $^3/_4$ av SA. Den andra ändpunkten L är den punkt där randstrålen SL träffar vattenytan. Om ögat successivt hålles i punkterna R, G, J och Q, så skulle alltså bilden av S synas successivt i punkterna S_1, S_2, S_3 och L. En våldsam sidoförskjutning skulle alltså inträda för vinklar, som närmade sig brytningsgränsen. Till liknande resultat kommer man genom geometrisk konstruktion enligt brytningslagen av de brutna strålarna från ett strålknippe utgående från S och liggande i ett vertikalt plan.

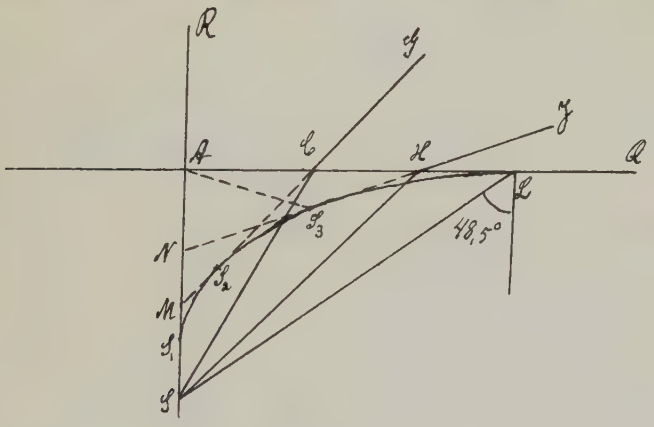


Fig. 1.

Frågar man sig nu, hur denna teori stämmer med verkligheten, så måste man tyvärr svara, att det ser inte alls ut att stämma. *I själva verket ser ögat ingen sidoförskjutning, utan föremålet synes endast upplyftat.* Flyttar man ögat som nyss nämnts, kommer bilden att successivt synas i punkterna S_1, M, N och A, som alla ligga på normalen genom S mot vattenytan AQ.

Det är lätt att övertyga sig om detta genom ett enkelt försök. Fäst t. ex. en linjal i vertikal ställning i ett stativ och nedför dess nedre del i ett kärl med vatten. För att icke spegelbilden nere i vattnet av den över

vattenytan befintliga delen av linjalen skall bli lika ljusstark som bilden av den under vattenytan befintliga delen av densamma och försvåra iakttagandet av denna senare, är det bäst att välja ett kärl med genomskinliga väggar, så att den nere i vattnet varande delen av linjalen kommer att belysas med diffust ljus från alla möjliga håll. En större glasvanna med vertikala väggar passar bra (se fig. 2). Måtten på den av mig använda vannan återfinnas på figuren. För att ej överkanten *AB* av kärlet skall hindra en att iakttaga den brutna randstrålen, som löper parallellt med vattenytan, bör man hälla kärlet alldeles fullt med vatten. Dessutom bör man ej nedföra linjalen djupare i vattnet än att randstrålen träffar vattenytan och går fri från kärlets vägg.

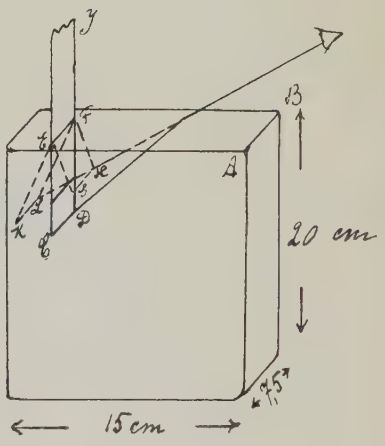


Fig. 2.

Först håller jag ögat rätt över linjalen och rör det därefter i en i ett vertikalt plan liggande cirkelbåge bort från linjalen och nedåt, tills det kommer i jämnhöjd med vattenytan, allt under bibehållande av ungefär samma avstånd från linjalens nedre kant. Under hela tiden fixerar jag underkanten *CD* av linjalen. Jag ser då, hur den under ögats förflyttning tycks röra sig rätt uppåt från den plats rätt under *EF*, där den först syntes, upp till *EF*, där linjalen skär vattenytan. *Men hela tiden utan någon sidoförskjutning.* Skulle kanten *CD* ha förflyttat sig närmare ögat, t. ex. till läget *GH* (se fig.), så skulle ju, eftersom *EF* ligger stilla, linjalen synas avbruten vid *EF*. Men detta är icke fallet. Den synes fullkomligt rak. Skulle den ha förflyttats *från* ögat, t. ex. till *KL*, skulle den ävenledes synas avbruten (se fig.). I ett kärl med lodräta väggar, som är delvis fyllt med vatten,

skulle man för övrigt alltid se väggen avbruten just i vattenlinjen, om det förekomme någon sidoförskjutning vid ljusbrytningen. Detta är emellertid, som var och en vet, icke förhållandet. Man kan inte gärna skylla på någon ögats okänslighet eller synvilla, ty man behöver vid ovannämnda försök endast luta linjalen en obetydlighet i riktning mot eller från iakttagaren, för att den skall synas avbruten i vattenlinjen (se fig. 3, lägena *b* och *c*, där emellertid ändpunkternas förflyttning i vertikal led överdrivits). Resultatet blir ej annorlunda, om man använder monokromatisk belysning. — *Eftersom punkterna C och D alltså tyckas ha förflyttat sig i riktning rätt uppåt, och dessa punkter äro godtyckligt valda, bör detsamma gälla för vilka punkter som helst i vattnet.*

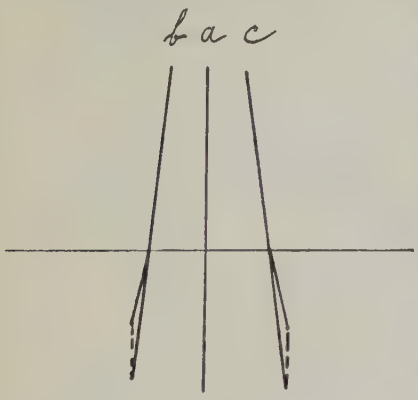


Fig. 3.

II. Teoretisk utredning.

Hur skall man nu förklara denna skenbara oöverensstämmelse mellan teori och verklighet? — Låt *S* vara en lysande punkt under vattenytan *ML* (fig. 4). *SM* är normalen till vattenytan genom punkten *S*. Låt vidare *ADBC* vara en yta med cirkelformig kontur, t. ex. en lins, vars huvudaxel sammanfaller med den centrala, i vattenytan brutna strålen *GF*. Vi vilja undersöka, varifrån de strålar tyckas komma, som utgå från ljuspunkten *S* och efter brytningen i vattenytan träffa den cirkelformiga ytan *ADBC*. Lägg ett vertikalt plan genom normalen *SM* och den cirkelformiga ytans medelpunkt *F*. (Detta kommer på teckningen att ligga i papperets plan.) Alla strålar, som utgå från *S* och ligga i detta plan, komma enligt det föregående att efter brytningen i vattenytan bilda brännlinjen S_1L. (*SL* är rand-

strålen.) De yttersta av dessa strålar, som slippa in i ytan *ADBC* äro *SN* och *SO*, vilka brutna få riktningarna *NA* och *OB* resp. Strålen *NA*:s förlängning bakåt kommer att skära *de oändligt nära densamma liggande* strålarnas förlängning i punkten *K*, som är den punkt, där *NA*:s förlängning bakåt tangerar brännlinjen S_1L. På samma sätt kommer *OB* och *de oändligt nära densamma liggande strålarna* att, förlängda bakåt, synas komma från *R*, som är

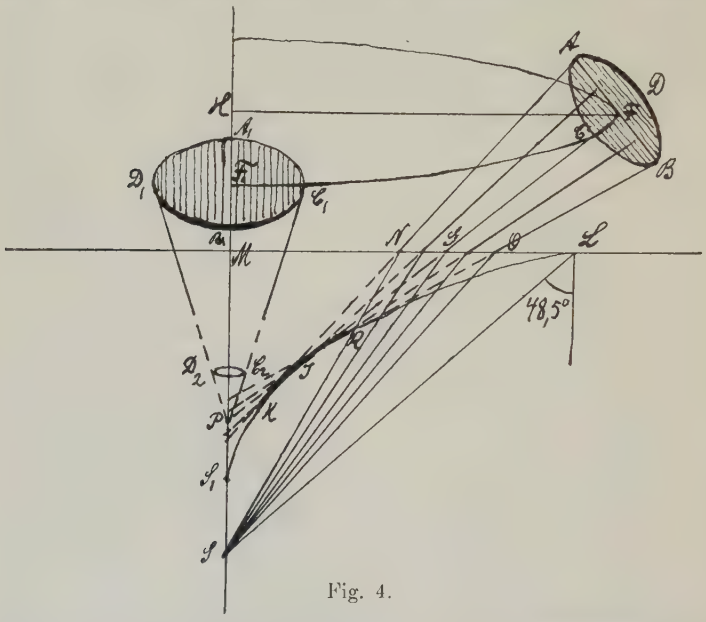


Fig. 4.

den punkt, där *OB*:s förlängning bakåt tangerar brännlinjen S_1L. Alla de strålar, som träffa den cirkelrunda ytan längs *AB*, se alltså ut att komma från någon punkt på bågen *KIR*, som är en del av brännlinjen S_1L. Men bågen *KIR* synes från *AB* under stark förkortning, som lätt synes, om man ritar ut dess projektion på en mot den centrala strålen *GF* vinkelrät linje.

Lägg nu oändligt många vertikala plan på ömse sidor om det ovan nämnda, alla gående genom normalen *SM* och alla bildande oändligt liten vinkel med grannplanen.

De komma att skära den cirkelformiga ytan *ADBC* längs linjer, som gå ungefär parallellt med *AB*. De strålar i vart och ett av dessa plan, som träffa *ADBC* längs en sådan linje, komma att ge upphov till liknande brännlinjer som *KIR* liggande till höger och vänster om denna (sedda från *ADBC*). Brännlinjerna bli endast kortare och kortare ju längre från mittlinjen *AB* planen träffa *ADBC*. De, som träffa i punkterna *C* och *D*, ge endast upphov till punkter. Alla de strålar, som utgående från *S* efter brytningen träffa *ADBC*, synas alltså komma från en *brännyta* med huvudsaklig utsträckning i horisontell led. Bättre synes detta på figuren, om vi låta *ADBC* intaga det nya läget $A_1D_1B_1C_1$, som erhålles, om hela den cirkelrunda ytan jämte det däri infallande strålknippet får vrida sig 90° omkring normalen *SH*. Den i horisontell riktning utdragna brännytan C_2D_2 utgör då bilden av *S* sedd från $A_1D_1B_1C_1$.

Längdutsträckningen C_2D_2 av denna brännyta erhålles ur likformigheten av trianglarna PC_1D_1 och PC_2D_2.

Man får:

$$\frac{C_2D_2}{C_1D_1} = \frac{PC_2}{PC_1} \text{ eller } C_2D_2 = \frac{PC_2}{PC_1} \cdot C_1D_1.$$

Därav synes, att bildens utsträckning i sidoled blir stor i samma mån som diametern hos ytan $A_1D_1B_1C_1$ (resp. öppningen hos linsen) är stor. Vidare blir den större, ju större PC_2 är, d. v. s. ju längre brännytan faller från normalen, eller, vilket betyder detsamma, ju större infallsvinkeln är. Slutligen växer den, när PC_1 avtar, d. v. s. den blir större, ju närmare föremålet ytan $A_1D_1B_1C_1$ placeras.

Men detta är icke den enda bild, som kan uppkomma. Fig. 5 visar åter samma strålknippe. *SGF* är den centrala strålen från *S* till *ADBC*. Låt *NEOH* vara den del av vattenytan, inom vilken alla strålar passera, som efter brytningen träffa *ADBC*. Låt *MGS* rotera kring normalen *SM*. Den centrala strålen *SG* skär då ut mantelytan av en kon. Alla strålar, som utgå från *S* och bilda samma infallsvinkel med vattenytan som *SG*, ligga på denna mantelyta.

Alla sådana strålar få efter brytningen samma brytningsvinkel, d. v. s. de brutna strålarnas förlängningar bakåt träffa alla normalen *SM* i exakt samma punkt, låt vara *P*. Alla strålar från *S*, som bilda något mindre men sinsemellan lika vinkel med *SM*, träffa normalen i en punkt, som ligger något nedanför *P*. Den stråle *SN* av dem, som gå in i ytan *ADBC*, som har den minsta infallsvinkeln,

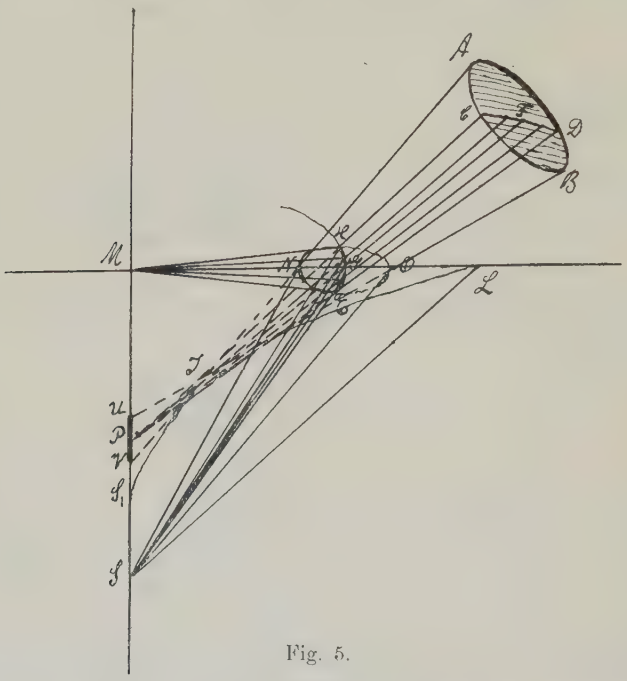


Fig. 5.

träffar normalen i *V* och strålen *SO*, som har den största infallsvinkeln, i *U*. Alla strålar, som utgående från *S* träffa den cirkelrunda ytan *ADBC* synas alltså även komma från en *brännlinje UV* liggande på normalen. Denna brännlinje är ljusstarkast i mitten, och ljusstyrkan avtar uppåt och nedåt.

Frågar man sig nu, varför ögat av de båda möjliga bilderna av punkten S utväljer den som ligger på normalen, så blir svaret detta: Ljusintensiteten hos denna bild blir större

och bilden skarpare, emedan ljuset i detta fall synes komma från en linje, men i förra fallet synes komma från en yta.

I det följande kommer jag att kalla den bilden, som uppkommer på normalen rätt över föremålet, för *normalbilden* och den, som uppkommer närmare iakttagaren, för *den utomnormala bilden.*

Anmärkas bör kanske, att om den nyssnämnda ytan *ADBC* är mycket liten eller ligger långt borta från ljuspunkten, så att vinkeln mellan de yttersta strålar, som slippa in i ytan, är liten, *kort sagt om ljusknippet endast består av centrala strålar*, så blir utbredningen av såväl den vertikala som den horisontella ljuslinjen ävenledes liten. Skillnaden i utseende mellan normalbilden och den utomnormala bilden blir då obetydlig (fastän avståndet mellan dem blir detsamma som för ett ljusknippe med icke centrala strålar), och man kan för detta fallet säga, att bilden av den punktformiga ljuskällan ävenledes blir punktformig. Så blir t. ex. fallet, om man iakttager den punktformiga ljuskällan med blotta ögat. Endast om man håller ögat mycket nära ljuspunkten, visar denna tendensen att breda ut sig till en linje. Denna har utsträckning i vertikal led, vilket visar, att det är *normalbilden* som framträder.

III. Ett par experiment med blotta ögat.

Som jag nyss framhållit, skulle såväl normalbilden som den utomnormala bilden av ett punktformigt föremål framträda för blotta ögat som en punkt, beroende på pupillens litenhet. Då man dessutom, särskilt vid seende med *ett* öga, har mycket svårt att exakt bedöma avståndet, kan man alltså säga, att beträffande ett punktformigt föremål de båda bilderna te sig ungefär lika vid seende med blotta ögat. Har föremålet utsträckning, går det lättare att avgöra, vilkendera av bilderna som kommer att dominera.

Vid de försök, jag gjorde, använde jag mig av den förut nämnda glasvannan, som är avbildad i fig. 2. Som föremål

med utsträckning använde jag en käpp, som stacks lodrätt ner i vattnet. I nedre ändan av käppen hade jag stuckit in en knappnål, och det nedåt vända knappnålshuvudet fick tjänstgöra som punktformigt föremål.

Ser man på en bestämd punkt, t. ex. knappnålshuvudet, med båda ögonen och håller huvudet i vanlig ställning, så att sammanbindningslinjen mellan båda ögonen är horisontell, så blir det under alla omständigheter normalbilden, som framträder. Ty man vill då placera bilden, där synlinjerna från de båda ögonen skära varandra. Och även om vardera ögat för sig vore benäget att fästa sig vid den utomnormala bilden, så komme ju båda synlinjerna förlängda att råkas i en punkt på normalen. Båda ögonen träffas ju av strålar, som lämna föremålspunkten under samma infallsvinkel och efter brytningen i vattenytan få samma brytningsvinkel. De brutna strålarna komma därför att, förlängda bakåt, träffa normalen i samma punkt.

Om jag lutar huvudet åt sidan så, att sammanbindningslinjen mellan ögonen kommer att ligga i ett vertikalt plan, och betraktar nedre ändan av en lodrätt käpp under vattnet (*MS* på fig. 6) med båda ögonen, så ha de strålar från *S*, som inträngа i övre ögat, träffat vattenytan under mindre infallsvinkel än de, som inträngа i nedre ögat. Det föreligger alltså ett annat fall än när sammanbindningslinjen mellan ögonen ligger i ett horisontellt plan. Om jag nu börjar att betrakta föremålet tämligen rätt uppifrån (läge 1 på fig. 6) och därefter flyttar huvudet åt sidan och neråt (till lägena 2 och 3), så uppträda följande fenomen, som i början äro ägnade att förbluffa. Till en början ser man käppen obruten, d. v. s. bilden faller längs normalen *MS*. *När infallsvinkeln ökas, inträffar det för ett visst läge, att bilden plötsligt kastar om, så att käppen syns avbruten i riktning mot iakttagaren (MF på fig. 6).* När infallsvinklarna ytterligare växa, kastar bilden om på nytt och återgår till läge utefter normalen *MS*, så att käppen åter synes rak. — Vid närmare analys visar det sig emellertid, att detta just är, vad man hade att vänta. Då bilderna för små infalls-

vinklar falla så nära varandra, att figuren blir otydlig, börjar jag vid analysen med de största infallsvinklarna (läget 3) och går till mindre och mindre. Sluter jag översta ögat i läget 3, skulle det nedersta ögat kunna se antingen normalbilden MP_6 eller den utomnormala bilden ME (ej utritad på figuren). E är den punkt, där förlängningen bakåt

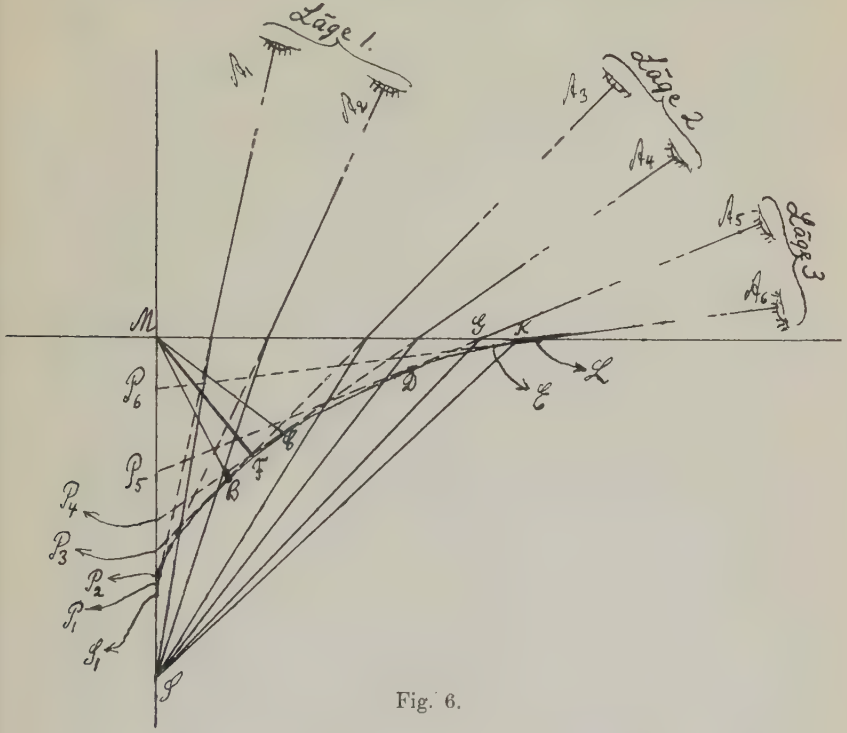


Fig. 6.

av strålen KA_6 tangerar brännlinjen S_1L. Ögat ser emellertid endast normalbilden MP_6, emedan den dels är skarpare (av skäl som förut relaterats), dels är betydligt ljusstarkare, emedan MP_6 är så mycket kortare än ME. Av samma skäl föredrar det övre ögat normalbilden MP_5 framför den utomnormala bilden MD. Ser man nu med båda ögonen på en gång, så framträder för medvetandet antingen den längre bilden MP_5, som då täcker över MP_6, eller båda bilderna

MP_5 och MP_6 var för sig, eller en blandningsbild, som lånar drag av båda. Vilketdera det blir, är nog i viss mån individuellt olika för olika personer och kan för övrigt även till en viss grad regleras av ens egen uppmärksamhet. När en ljusstråle träffar gränsytan till ett nytt medium, är det ju som bekant endast en del av densamma, som brytes in i detta, medan en annan del reflekteras. Ju större infallsvinkeln är, desto mera ökas den procent av ljuset, som reflekteras för att vid brytningsgränsen växa till 100 %. Av denna anledning borde bilden MP_6 från nederögat vara ljussvagare än bilden MP_5 från överögat. Men å andra sidan är bilden MP_6 hopträngd, så att den är mycket mindre än MP_5. Detta verkar i motsatt riktning, och för stora infallsvinklar visar det sig i själva verket, att denna sista faktor överväger, så att MP_6 synes väl så stark som MP_5. Vid det försök, jag gjorde, upptäckte jag en sak, som jag icke vetat om förut, nämligen att jag tycktes se något bättre med vänsterögat än med högerögat. När jag höll högerögat nederst, framträdde nämligen för medvetandet vänsterögats bild MP_5, medan högerögats bild MP_6, som ändå objektivt var något ljusstarkare, ej särskilt framträdde. Höll jag däremot vänsterögat nederst, så framträdde för medvetandet båda bilderna, vänsterögats bild MP_6 lagrad ovanpå övre delen av MP_5.

Flyttar man nu ögonen successivt högre upp, d. v. s. så, att de strålar som inträngа i ögonen ha brutits i vattenytan under en mindre infallsvinkel, så växer normalbilden. Den utomnormala bilden avtar till en början, uppnår i läget *MF* sitt minimum och börjar sedan åter växa. I läget 2 har den utomnormala bilden *MB* från det övre ögat nyss passerat sitt minimum och den utomnormala bilden *MC* från det nedre ögat skall snart passera detsamma. *MB* och *MC* äro därför lika långa och lika skarpa. De äro även mindre och därför ljusstarkare än normalbilderna MP_3 och MP_4. Alla omständigheter sammanträffa därför för att tillåta de utomnormala bilderna *MB* och *MC* sammansmälta inför medvetandet till en ny bild, som även

dominerar över de båda normalbilderna, och därför synes käppen i detta läge avbruten. Den »avbrutna» delen *MF* tycks ligga ungefär vinkelrätt mot synlinjen från ögonen mot *F*. Att det icke räcker med att de båda bilderna äro lika långa utan att de även måste vara lika skarpa för att kunna sammansmälta, fann jag, när jag en gång hade upphävt det ena ögats ackommodationsförmåga medelst atropin. Den bild, jag såg med detta öga, var då visserligen förlagd till rätt ställe men mycket suddig. Såg jag nu med båda ögonen på käppen från läget 2, så sammansmälte icke de båda utomnormala bilderna. *Käppen syntes icke avbruten*, utan för medvetandet framträdde normalbilden från det friska ögat.

Kommer man successivt till ännu mindre infallsvinklar, så växa de utomnormala bilderna alltjämt. Den utomnormala bilden från det övre ögat (i läget 1) blir längre än den från det nedre (bilderna ej utritade på figuren). De sammansmälta därför icke till en ny bild, utan ögonen se åter normalbilderna MP_1 och MP_2. Åtminstone jag kan i detta läge icke, när jag ser med båda ögonen, för medvetandet särskilja de båda ögonens normalbilder, utan de sammanfalla till en blandningsbild längs normalen *SM*.

(Forts.)

Om likriktare.

Ett inlägg av **MAGNUS LEMOINE.**

I en artikel i ett föreg. häfte av denna tidskrift »Ett likriktaraggregat med glimljuslampan som likriktare» av A. Frendel anser förf., att man vid mindre skolor, »där man ej har råd att skaffa sig en roterande omformare (motorgenerator) med instrumentkopplingstavla, vilket under alla omständigheter annars torde vara det bästa, någorlunda kan reda sig med ett ackumulatorbatteri jämte ett glimljuslikriktaraggregrat» av av förf. beskrivet slag. Det finnes dock i den vägen numera mycket att välja på. Likriktare, som grunda sig på en glödande kropps förmåga att utsända elektroner, konstrueras för vitt skilda ändamål i mycket olika storlekar. Ett exempel på dylika apparater, försedda med s. k. Wehnelt-katod, vilka väl lämpa sig för skolbruk, utgöra de små likriktare av Philips' fabrikat, som finnas i P. A. Norstedt & Söners nya fysik-katalog, n:r 6721 och 6723, av vilka den förra ger 1,3, den senare ända till 6 amp. ström vid omkr. 12 volts spänning. Apparaterna äro inbyggda i en liten plåtlåda med handtag. De kunna bekvämt bäras in i vilken lärosal som helst. Sedan likströmsledningens klämmor anslutits till experimentapparat eller ackumulatorer, ev. med något förkopplingsmotstånd, insättes växelströmsledningens stickkontakt i väggens kontakt för växelström. Härvid erhålles likström i apparaterna. Man kan säga, att likriktaren ersätter det vid likström nödvändiga större förkopplingsmotståndet; det oaktat bör man givetvis helst ladda ackumulatorer med likriktaren samt sedan använda dem vid experiment. — Accumulatoren-Fabrik A. G., Berlin bygger enl. prislistor likriktare med Wehnelt-katod för intill 110 volt och 50 amp. Dessa

apparater torde vara så nya, att längre prov ännu icke äro utförda i skolor. Detta är däremot fallet med *kvicksilverlikriktare*, vilka tekniskt äro fullt utexperimenterade. Katoden utgöres i dessa apparater av kvicksilver, som utgör negativa polen i en ljusbåge. Elektronerna utgå från ljusbågens fotpunkt i kvicksilvret. Av Brown Boveri & Cie, Schweiz, byggas dylika likriktare med glaskolv i storlekar upp till 700 volt och 300 amp. Den storlek, som kan förekomma i en större skola, 110 volt och 30 amp., befinner sig således långt från den övre effektgräns, som en glaskolv kan tåla. Genom frånvaron av rörliga delar, som skola smörjas, genom sitt tysta arbete och på grund av sin mera konstanta spänning äro dessa apparater att föredraga framför motorgeneratorerna för skolbruk. Redan 1922 såg förf. tyska skolor, i vilka man till allmän belåtenhet utbytt förut befintliga roterande omformare mot kvicksilverlikriktare. — Ovan nämnda firma bygger s. k. Gross-Gleichrichter med stålkolvar för ännu större belastningar, för spårvägar samt elektriska järnvägar med likströmsdrift, sedan ett par år ända till 4 000 volt. — I Tyskland tillverkas kvicksilverlikriktare utom av ovan nämnda firmas dotterbolag, Gleichrichter G. m. b. H., av bland andra A. E. G. och Siemens-Schuckertwerke. — Man torde lugnt kunna säga, att den skola, som f. n. anskaffar en roterande omformare i stället för en modern likriktare, är efter sin tid.

Ovanstående notiser äro hämtade ur manuskriptet till ett litet häfte om Omformare och likriktare för skolbruk m. m., som snart utkommer på P. A. Norstedt & Söners förlag, till vilket häfte intresserade hänvisas. Utförligare behandlas problemet i ett arbete av Günthershulze und Germershausen, Uebersicht über den heutigen Stand der Gleichrichter, Hachmeister & Thal in Leipzig, 1925, 4 Mark.

Råd och vinkar för undervisningen.

Linjalritningen i klass 4.

I de metodiska anvisningarna för teckning i realskolan säges bl. a.: »Den plangeometriska kursen i linearritning anordnas i anslutning till undervisningen i geometri efter samråd med ämneskonferensen i matematik. Hithörande övningar böra först genomgås av läraren i geometri och därefter inpassas i teckningsundervisningen.»

Dessa anvisningar synas mig lämpliga. Skada blott, att detta samråd med ämneskonferensen i matematik i regel så sällan förekommer, att väl många matematiklärare aldrig haft tillfälle deltaga däri. I stället är det väl oftast så, att teckningsläraren följt och alltjämt följer en kanske för många år sedan uppgjord plan. På grund härav kan det lätt inträffa, att ordningsföljden vid undervisningen omkastas, så att teckningsläraren hinner före geometriläraren. Det visar sig för den senare däri, att eleverna kunna utföra vissa konstruktioner, innan de genomgåtts på geometrilektionerna. Kanske ha eleverna därvid lärt sig dem på helt annat sätt, än geometriläraren tänkt sig, och kanske ha de icke alls förstått, *varför* de göra så eller så.

Ett samarbete mellan tecknings- och geometrilärare bör alltså äga rum med ej alltför långa tidsintervall. För att detta samarbete skall lämna utbyte av värde, bör, synes det mig, ett förslag till plan för den geometriska teckningen för termin och klass uppgöras — lämpligen av teckningsläraren — och föreligga i god tid före den gemensamma konferensen. Häri upptagas de teckningar, som brukat utföras och medhinnas samt ordningsföljden dem emellan jämte ev. förslag till ändringar. Det är lätt gjort att hektografera figurerna, så att varje matematiklärare i förväg kan få ett exemplar. Vid konferensen har man då

att överväga det mest givande urvalet av figurer bland en mångfald tänkbara, ordningsföljden mellan figurerna och slutligen varje figurs lämpligaste uppritning.

Vad linjalritningen i klass 4 beträffar, synes den böra till huvudsaklig del eller helt och hållet förläggas till vårterminen. För att få lämpligt material för linjalritningen måste nämligen eleverna, tyckes det mig, under geometriundervisningen ha hunnit så långt, att de genomgått åtminstone några av de grundläggande problemen. En dylik fördelning av undervisningstiden står i god samklang med kursplanens anvisning: »I allmänhet böra de båda åt teckningsundervisningen anslagna veckotimmarna periodvis användas för successivt genomgående av de olika delarna av kursen.» *H—m.*

Astronomiundervisningen i ring I.

För en del år sedan läste undertecknad fysik i en första ring. Den däri ingående kursen i astronomi kom att vålla mig åtskilliga bekymmer. Undervisningen hade planlagts på vanligt sätt: eleverna skulle genom egna iakttagelser och observationer samla material, som sedan skulle läggas till grund för den fortsatta undervisningen. Men väderleken sade nej. Vi samlades icke så få gånger, då dagen lovat stjärnklar kväll, men blevo besvikna. Till slut måste jag kasta planen och söka annan utväg. Då jag emellertid ogärna ville släppa tanken på att giva eleverna tillfälle till en smula självständigt arbete, bestämde jag mig för att låta dem genomgå en del av kursen föredragsvis. Pojkarna fingo därför i uppgift att hålla korta föredrag över olika ämnen. Jag skrev upp på tavlan en rad sådana: solen, månen, planeterna (en föredragshållare för varje planet), kometerna o. s. v. Samtliga ämnen blevo efter fritt val genast abonnerade. Resultatet överträffade vida mina förväntningar. Eleverna hade, såvitt jag minnes undantagslöst, lagt ned tid och intresse på sina uppgifter. De hade skaffat sig litteratur från läroverkets bibliotek och från många andra håll; de hade letat upp ett flertal skioptikonbilder,

och flera hade ritat nya sådana. Auditoriet, d. v. s. övriga elever, följde föredragen med det tydligaste intresse dels för innehållets skull, dels naturligtvis och icke minst därför, att föreläsarna voro deras kamrater, envar med sin individuella prägel över framställningen.

*

Icke alldeles utan skäl beskyllas vi lärare för att taga våra elevers receptivitet starkt i anspråk, medan vi låta deras verksamhetslust och initiativförmåga, deras produktiva kraft, slumra. Detta, ehuru sistnämnda förmögenheter äro av vida större värde i livet än den förstnämnda, och ehuru våra elever med ett intresse, varpå ingen kan misstaga sig, möta oss, då vi ge dem tillfälle till lämplig självverksamhet. Jag tror, att undervisningen i fysik och kemi liksom i ett flertal andra ämnen äger möjligheter i nu antydd riktning, som endast obetydligt utnyttjats. Här några hastigt nedkastade antydningar. Låt — naturligtvis frivilligt — en elev hålla föredrag över ett ämne i anslutning till kursen, en annan referera en bok, redogöra för något vad det vara må, som han har intresse för och känner till eller vill lära känna, eller låt någon på egen hand ställa i ordning och för klassen visa försök, som belysa något område, som kan intressera alla men ej behöver göras till föremål för läxförhör. Låt eleverna någon gång vid laborationsövningarna få göra undersökningar mera på egen hand, låt dem tillverka någon apparat, vars konstruktion de själva få studera sig till o. s. v. *H—m.*

Förslag eller uttalanden om erfarenheter i anslutning till ovanstående mottagas med tacksamhet. *Red.*

Till redaktionen insända böcker.

Ellen Wällstedt, *Lärobok och exempelsamling för den aritmetiska kursen i matematik i kommunala mellanskolans klass 1*, Magn. Bergvalls förlag, 1923. Häft. kr. 1: —.

K. Asperén och I. Damm, *Lärobok i räkning*, förra delen, 8 uppl., J. Beckmans förlag, 1924. Kr. 5: —.

Det sistnämnda arbetet omfattar kursen i aritmetik och algebra i realskolans 5 första klasser, det första ansluter sig till aritmetikkursen i kom. mellanskolans klass 1 och avser att vara en tillämpning på bråkläran, »en liten proportionslära, som skulle reda upp åtskilliga för barnen dunkla begrepp»; förf. anser också, att med bokens kurs efter avslutad mekanisk bråkräkning en fast grund blivit lagd för efterföljande kurser i matematik. Utom en rent aritmetisk avdelning innehåller den även ett kapitel ekvationslära med tillämpningar. Asperén-Damms lärobok har således en betydligt mer omfattande kurs till behandling, ett 385 sidors arbete, som dessutom är kompletterat med en senare del, innehållande 6:e klassens kurs. Den mycket begränsade uppgiften i Wällstedts bok har förf. sökt lösa i ett litet häfte på 42 sidor. Det är dessutom ett arbete från senare år (1923), medan Asperén-Damms bok är av gammalt datum med 1901 som första upplagans utgivningsår.

Anledningen till ett sammanställande av dessa båda arbeten är den, att var och en, som sedan gammalt känner till A.-D:s lärobok, efter en blott flyktig granskning av W:s arbete får en bestämd känsla av att det yngre arbetet på väsentliga och centrala punkter haft det äldre till trogen förebild. Man kommer saken omedelbart på spår, genom att A.-D:s originella idé med exemplens uppdelande i en

A- och en facitlös B-avdelning även accepterats av W. med en i delvis samma vändningar förordsvis lämnad motivering.

Vissa paragrafer i W:s bok vittna om ett mera självständigt arbete och visa i alla händelser ej större likhet med motsvarande delar i A.-D. än som betingas därav, att det är samma ämne som behandlas. Detta gäller om § 1 (s. k. parentestal), §§ 4, 7 (myntreduktion), § 12 (repetition) samt den senare, algebraiska delen. §§ 5, 9, 10 och 11 påminna på vissa punkter om resp. §§ 113, 116, 118 och 119 i A.-D. utan att därför kunna betraktas som plagiat. Detsamma kan sägas om § 6 i W:s bok, ehuru dess sista del, ex. 17—21 knappast torde ha kunnat »författats» utan A.-D:s öppna bok (§ 114, ex. 13—19) under ögonen. Som plagiat måste man däremot betrakta §§ 2 och 3 (förhållandet mellan det hela och dess delar samt dessa senare inbördes) av § 111 i A.-D. (samma rubrik utom att *och* står i stället för *samt* och ordet (*linjedelningar*) tillfogats) och § 8 (procenträkning) av § 115 i A.-D. Det är naturligtvis ej rena avskrifter; andra siffror och exempel samt ibland andra bokstäver i figurerna, men med avseende på den metodiska gången och sakinnehållet råder stor överensstämmelse. I vissa detaljer är det också ren avskrift, som t. ex. ex. 6 i W:s § 2 av lydelse: »*AC* är $\frac{4}{7}$ av *CB*. a) Vilken linjes delar omnämnas? b) Vad slags delar omnämnas? c) Hur bör alltså *CB* tänkas delad? d) Hur många av de erhållna delarna innehåller *AC*? e) I hur många lika delar blir *AB* delad? f) Hur stor är *AC* i fh. t. *AB*? g) Hur stor är *CB* i fh. t. *AB*? h) Hur stor är *AB* i fh. t. *CB*?» Motsvarande ex. i A.-D. (§ 111, ex 5) har $\frac{3}{5}$ i stället för $\frac{4}{7}$, *AC* i st. f. det sista *CB* och ett tillagt i). För övrigt överensstämma exemplen fullständigt, även med förkortningar (fig. i W. dock större och i överenssämmelse med olikheten i texten delad i proportionen $\frac{4}{7}$ i st. f. $\frac{3}{5}$).

En bok med den bestämda uppgift, som W:s arbete ger sig ut för att hava, kan naturligtvis ha sitt berättigande, och intet ont kan i och för sig sägas ligga däri, att idéer utnyttjas, som redan kommit till användning i äldre läro-

böcker och vilka man funnit förtjänstfulla. Men ett lån av här omnämnd art tycker man väl ändå ej borde ifrågakomma utan vederbörandes (d. v. s. i detta fall förlagets, då båda författarna äro avlidna) vetskap och tillåtelse. I varje fall hade man kunnat fordra ett omnämnande i förordet, att de och de paragraferna utgöra en omarbetning av motsvarande i A.-D. Wällstedtska bokens förläggare kan man ej förebrå något, då förlagen i dylikt avseende måste lita på författarnas honnête ambition. Det här påtalade sättet att författa böcker är så pass stötande, att undertecknad ansett ett offentligt påpekande på sin plats.

Hj. O.

Harald Yngve Larson, *Lärobok i plan geometri för gymnasiet*, motsvarande Euklides' femte och sjätte böcker jämte övningsuppgifter, Almqvist & Wiksells förlag, 1926. 116 sid. Kr. 3: 75.

Det är en mycket stor lättnad vid undervisningen, om man lyckas få använda en lärobok, som man i det stora hela kan följa. En och annan mindre uteslutning eller omkastning eller något tillägg gör man väl alltid även i den bästa bok, men att på grundval av dylika små sporadiska blyertsanteckningar i marginalen påfordra en ny upplaga — eller rent av ge ut en själv under eget författarnamn — torde få anses mindre välbetänkt.

Vad nu särskilt beträffar plangeometrin på gymnasiet finns som bekant åtskilliga förträffliga läroböcker. Jag har haft nöjet att få använda såväl Ruben Mattsons som K. L. Hagströms lärobok och sätter dem båda högt, om jag också föredrar den förra, som synes mig vara denna alltid klara och pålitliga författares bästa arbete.

Det har varit mig en glädje att se, att jag inte står ensam om denna uppfattning. Harald Yngve Larson visar sig i sin plangeometri för gymnasiet fullkomligt dela dessa mina sympatier. Han är tydligen förtjust i Mattsons lärobok, men anser även Hagströms vara fullt användbar. Läro-

gången är Mattsons med undantag av att bissektrissatserna få gå före likformighetsläran, detta efter föredöme av Hagström, som även fått släppa till kapitlet om cirkelns yta och omkrets. I ungefärliga siffror förhåller det sig så, att av de 88 textsidor, som återstå, om övningsexemplen frånräknas, komma 68 från Mattson och 12 från Hagström. De övriga 8 skulle man kunna kalla författarens egna. De förekomma dock ej i sammanhang utan i små stycken här och där. Avskriften är icke absolut ordagrann. Där det hos Mattson står: Men $a^2 + b^2 = c^2$, skriver Larson: Men nu är $a^2 + b^2 = c^2$, för att ta ett rätt typiskt exempel.

När det gäller en lärobok i geometri kan naturligtvis åtskilligt i fråga om bevis och tankegång sägas vara allmän egendom, men just i Mattsons bok, som här varit den huvudsakliga källan, torde en hel del i den vägen vara original, t. ex. bevisen vid rektangelformeln, harmoniska cirkeln, satserna i likställighetsläran m. m. Och om varken lärogången eller de enskilda bevisen för satserna äro egen uppfinning, vad har då författaren gjort själv? Jo, ett plagiat. I vad mån lagen om litterär eganderätt här är användbar, törs jag inte yttra mig om, men nog vore det enligt min mening riktigast av förlaget att dra in och makulera upplagan. *Bengt E. Nyström.*

Tom Moll, *Lärobok i fysik* (10:e uppl., reviderad av Ture Rudberg), III. *Magnetism och elektricitet,* Norstedt & Söners förlag, 1926. 144 sid. Klotb. kr. 2: 75.

I denna tidskrift årg. IX sid. 160—179 har Benkt Söderborg[1] skrivit en mycket intressant uppsats »Äldre och nyare läroböcker i fysik för gymnasiet». Som ett allmänt resultat av jämförelsen mellan Molls och »efter-Mollska» författares läroböcker citeras uttrycket »ingen räckte till tronen, där den gamle satt», ett omdöme, som säkerligen de allra flesta av vårt lands fysiklärare instämma i. Förf. menar dock,

[1] Då rektor Söderborg, som anmält de föregående delarne av Moll-Rudbergs lärobok i fysik, nämnes som medarbetare i den nu föreliggande del III, har lektor Lemoine ombetts att skriva denna anmälan. *Red.*

att Molls elektricitetslära står på »ett lägre plan än de övriga» samt väntar med »stigande iver» på en ny upplaga av denna del, som »verkligen behövde en grundligare omarbetning». Ehuru anmälaren är fullt ense med förf. om, att en omarbetning behövdes, så förefalla dock de allmänna omdömena om arbetet något för hårda.

Undervisningen i fysik i allmänhet och i elektricitetsläran i synnerhet erbjuder ett komplex av problem, som helt säkert sakna exakta lösningar, eller kanske riktigare ha ett oändligt antal approximerade sådana. Undervisningen i detta ämne strävar efter att vara exakt eller kanske riktigare matematiskt logisk, den vill vara experimentell, den måste avstå från högre matematik och den skall till en viss grad behandla tekniskt-praktiska problem. Den skall dessutom, vilket icke alltid fullt sammanfaller med ovan givna synpunkter, vara sådan, att eleverna lösa så många problem som möjligt i studentexamen. Det är under sådana förhållanden icke att undra på, att så många olika metoder finnas i olika läroböcker, beroende på vilken eller vilka av de ovan angivna synpunkterna som mest betonas. Den lärare, som skall utbilda lägre ingenjörer, ser mest på de tekniska problemen, och hans undervisning kan på ett visst stadium bli något ungefär som Otto Gallanders lärobok, där läran om växelströmmar får en mycket framskjuten plats, men där C. G. S.-systemet utdömes. Den, som utgår från matematiska synpunkter, kommer att lägga större vikt vid en elegant och motsägelselös logik, uppbyggd från C. G. S.-definitioner. Även i fråga om undervisning tycks det finnas något, som kan kallas modernt. För omkr. 20 år sedan skulle allt bevisas med experiment, helst laborationer av eleverna själva. De skulle upptäcka naturlagarna. Man glömde, att skolans resurser och tid icke räcka för något dylikt, att flera naturlagar icke kunna bevisas med experiment, som kunna utföras i en skola, samt att vissa skolförsök mera utgöra exempel på naturlagarna än bevis för dem.

På nu angivna skäl kan man icke skapa något slutgiltigt

i fråga om en lärobok i detta ämne, även om man skulle bortse från den revolutionsartade utveckling, som fysik och kemi, men i all synnerhet elektricitetsläran undergått under de senaste årtiondena, en utveckling, som i vissa fall skulle ha fordrat en upplaga åtminstone vart annat år, om läroboken skulle ha följt med allt. På grund av alla svårigheter att redigera en sådan lärobok går man till läsningen av föreliggande, av Ture Rudberg reviderade lärobok i *Magnetism och elektricitet* av Tom Moll med det allra största intresse, särskilt då man konstaterat den pietet och den noggrannhet, med vilken Rudberg omarbetat de övriga delarna.

Anmälaren fäster sig till en början vid, att kapitlet om *elektromagnetismen* i denna upplaga fått en riktig placering, i det magnetfältet i solenoider behandlas före elektromagneter, en i hög grad behövlig förbättring. *Coulombs lagar* ha intagits i texten, vilket ger en helt annan fasthet åt framställningen, än man förr kunde få. Därigenom ha också begreppen magnetfält, enhetspol och enhet för elektricitetsmängd kunnat införas, vilket allt bidrager till reda. Potentialbegreppet har definierats i elektrostatiken. Biot-Savarts lag har medtagits. Bland andra nyheter märkas ökat utrymme åt radiotelegrafi och »rundradio», varvid det viktiga tre-elektrodröret fått en grundlig behandling. I läran om växelströmmar lämnas bevis för formeln för strömmens effektiva värde och effektfaktorns betydelse. Kort beskrivning lämnas på elektrifieringen av banan Stockholm—Göteborg.

Den viktigaste teorien inom elektricitetsläran, *elektronteorien,* har enligt förordet »kommit till användning, så ofta den synts ägnad att på ett enkelt sätt klarlägga ett fenomen». Elektronteorien är trots namnet i våra dagar vida mer än en arbetshypotes. Det synes anmälaren, som om den borde användas överallt, där så kan ske. Dess införande sker naturligt i samband med katod-, kanal- och röntgenstrålar, varvid glödelektrodröret icke gärna kan förbigås. En mycket

kort repetition av de radioaktiva ämnena (eller genomgång därav, om de ej behandlats i kemien) ger tillfälle till att tala om atommodellen, om gasjoner och elektrolytiska joner, varav omedelbart följer hela elektrokemien, helt behärskad av elektronteorien. — Rudberg nämner elektroner, t. o. m. atommodellen, redan i samband med Symmers och Franklins teorier, utan att dock experimentella fakta anföras för teorien. Vid behandlingen av ljusbågen användes teorien, och glödelektronström nämnes. Först i slutet av boken behandlas urladdningen i förtunnade gaser. Röntgenröret med glödkatod nämnes ej, och ej heller den viktiga kvicksilverlikriktaren.[1] »Punktljuslampan» omtalas, vilken dock, såvitt anmälaren har sig bekant, torde ha ganska liten betydelse. Kort sagt, den utomordentliga förenkling, som elektronbegreppet ger, användes ej alltid, enligt anmälarens mening, i Rudbergs bok. Vilken blixtbelysning får inte både fysik och kemi genom att man nämner grundämnena n:r 8—12 (O, F, Ne, Na, Mg) och 16—20 (S, Cl, Ar, K, Ca) med sina stabilt byggda ädelgasatomer Ne och Ar, negativa grundämnen till vänster om dem samt positiva till höger, med atomvärde och elektrolytisk dissociation tydligt beroende av antalet elektroner i atomerna.

Ett problem, som säkerligen många motsett med stort intresse, är behandlingen av *potentialbegreppet*. Svårigheterna ligga till stor del i det experimentella. Vi sakna tyvärr en skolapparat, med vilken vi kunna mäta potentialer i enlighet med definitionen. Molls metod att kvantitativt definiera begreppet prop. mot styrkan av den ström, som framkallas i en given tråd, känna alla. Den är logisk, även om den förefaller något abstrakt. Av de »efter-Mollska» författarna kopplar C. Bergholm utan vidare en voltmeter parallellt med en ledningstråd, genom vilken olika strömmar ledas, varvid volt- och ampermetrar avläsas. Han förklarar voltmetern några sidor senare, enl. Ohms lag, och råkar således

[1] Som exempel må här nämnas, att enl. Tekn. Tidskr. 1927, n:r 1 skall den bekanta »Berliner Stadtbahn» nu elektrifieras med likström av 800 volts spänning, varvid växelströmmen likriktas med kvicksilverlikriktare av tillsammans 114 000 kilowatt.

göra cirkelbevis. Ivar J:son Malmborg använder kvadrantelektrometer och säger, att »erfarenheten visar», att dess utslag för små vinklar äro prop. mot spänningen (annan möjlighet att koppla elektrometern än den använda nämnes ej). Resultat med detta instrument referera således till »erfarenheten» och bevisas ej, vilket förf. är medveten om, såsom framgår av hans försiktiga uttryck om seriekopplade element: »Med elektrometer kan man visa». Rudberg kopplar ett antal lika ackumulatorer i serie och undersöker potentialdifferensen mellan polerna på en och en med elektroskop. Han menar sedan, att pot.-diff. mellan 2, 3, ... är 2, 3, ... gånger så stor som mellan en ackumulators poler. 1, 2, 3, ... stycken ackumulatorer kopplas sedan i serie med en smal (enl. boken konsekvent »fin») ledningstråd, varvid man finner önskat värde på strömstyrkorna.

Vid första påseende kan metoden nog synas bestickande enkel. Vid närmare granskning finner man dock vissa brister. Varför är man alldeles säker på, *utan alla undersökningar,* att potentialdifferenser kunna adderas? I tre-fasströmmar är pot.-diff. mellan fas och nolla ofta 127 volt, således mellan två faser 127 + 127 volt?! En elev frågar naturligtvis, varför man på förra stället får addera, utan bevis, att så får ske, medan man ej får addera på det senare stället. *Det gäller bevis för en av hela elektricitetslärans allra viktigaste lagar.* När Rudberg sedan leder ström från flera seriekopplade ackumulatorer, användes Ohms lag II, ej I. I den ovan nämnda uppsatsen av Söderborg, av vilken Rudberg tycks ha tagit starka intryck, rekommenderas detta tillvägagående, ehuru det betecknas som »experimentell nödlögn» (sid. 172). Det torde kunna ifrågasättas, om ej de båda begreppen »experiment» och »lögn» med eller utan prefix utesluta varandra. Så menar åtminstone anmälaren, och detta även, om »lögnen» gömmer sig bakom avläsningsfelen.[1] Hur går det för en skribent i studentexamen, om han för-

[1] I anmälarens Handl. i exp. fys. sid. 163 rekommenderas just detta försök i samband med genomgången av Ohms lag. Det bör för undvikande av missförstånd nämnas, att det där användes för *åskådliggörandet* av definitionen, ej för att sättas i stället för densamma.

växlar de båda lagarna? Och kanske, när vi se skolans mål i stort, det ändå är viktigare att *våra elever lära sig tänka kritiskt*, än att de tro sig få experimentellt bevis för en lag, som med denna lärogång knappast kan bevisas i skolan.[1] Anmälaren tror, att ett dylikt meddelande, att man funnit, att spänning och ström äro prop., samt att man vid behandlingen av Joules lag finner detta stå i överensstämmelse med potentialbegreppet, varit ärligare, om också skenbart mindre elegant. Malmborgs framställning är i sak sådan. Kvadrantelektrometern hade kunnat vara borta. — Anm. vet, att Rudberg behandlat Ohms lag på sätt som skett delvis mot sin vilja, »efter uttalade önskningar», »tyvärr dock med uppoffring av en viss stringens», enl. förordet.

Ett annat område, på vilket man möjligen kan få intrycket att mera är bevisat, än som vi f. n. kunna bevisa, är behandlingen av *magnetism och induktionsströmmar* med »förtätade kraftfält». På sid. 8 och 9 antagas kraftlinjerna vilja sammandraga sig i längdriktningen och spänna mot varandra vinkelrätt däremot. I läran om induktionsströmmar gå dessa antaganden igen på sådant sätt, att man lätt kan få den uppfattningen, att det är fråga om mer än en minnesregel. »Förklaringen» till generatorer o. s. v. är ju ingenting annat än att vi uppvisa, att vissa naturlagar, som vi funnit verka under vissa förutsättningar vid våra enkla försöksanordningar, ha samma förutsättningar och således enl. naturens lagbundenhet få samma verkningar i de tekniska maskinerna.[2] Om det, som faktiskt sker, känna vi tyvärr i detta fall ej så mycket. Anmälaren är för övrigt ej säker

[1] Jämför MEYER, Är Ohmska lagen en experimentell eller rationell lag? och GALLANDER, Om modern framställning av Ohms lag, i denna tidskr. årg. 1919—1920. Då Söderborg i citerad uppsats säger, sid. 165, att Moll försöker »kringgå» potentialbegreppet och »hjälper sig fram med analogier», och att det därigenom »blir en klyfta mellan de i elektrostatiken givna grundbegreppen och elektrodynamiken», så torde det knappast vara riktigt. Av Gallanders uppsats, sid. 86, framgår, att det tvärtom just var svårigheter av olika slag, vilka ju också framträda i detta arbete, som förmådde Moll att övergiva den av Rudberg upptagna metoden och att göra, som han gjorde.

[2] Jämför ovan citerade Handl. i exp. fys. sid. 183.

på, att Rudbergs metod för eleverna är lättare än Maxwells regel, som ju innebär ungefär följande även för de allra lägsta skolformer användbara tankegång: om elektrisk ström ledes genom en solenoid, uppkommer ett magnetiskt fält inuti solenoiden, och om det magnetiska flödet genom solenoiden ändras, uppkommer i solenoidens trådar elektrisk ström, en tankegång, som även kan användas för kvantitativa beräkningar. Den ytterligt enkla metoden att visa, att elektromotorer kunna förklaras genom elektromagneters attraktion eller repulsion, synes också vara för värdefull och åskådlig för att kunna helt utelämnas i ett arbete som detta. Endast medelst dessa metoder torde man också kunna få ett direkt samband mellan kursen i klass 5 och den i gymnasiet.

I samband med elektromagnetismen må ett ord sägas om experimentet sid. 58, där Rudberg påvisar en *rörlig ledares rörelse i ett magnetiskt fält* genom att hänga en horisontell metalltråd i ledande snören i ett lodrätt magnetiskt fält. Ledarens rörelse blir på detta sätt bunden till en cylinderyta. Försöket visar endast, att *en komposant* av kraften finnes i rörelsens riktning, ej att hela kraften är tangent till cylindern. Användes julgransglitter, enl. Exp. fys. sid. 160, undgår man denna olägenhet.

Ankarreaktionen i likströmsmaskiner betraktar anmälaren som en rent teknisk sak, som ej hör hemma i en lärobok som denna. Borstarnas kontaktpunkter förskjutas numera i allmänhet icke, som boken uppger, utan kompenseras ankarreaktionen med »vändpoler», också ett rent tekniskt begrepp.

Kapitlet om *generatorer* har enl. förordet »helt omarbetats, varvid ringinduktorn fått lämna sin framskjutua plats åt truminduktorn. Figurerna till växelströmsgeneratorerna ha erhållit ett verklighetstrognare utseende.» I en teknisk växelströmsgenerator eller -motor ligga ett antal trådhärvor, var och en innehållande ett flertal trådar, i spår i statorn. Detta kan man ej omedelbart gå in på. Man måste, såsom alltid är fallet vid behandlingen av något nytt, i början

abstrahera från en del av verkligheten, man måste behandla saken schematiskt. Moll såg till en början bort från statorns form för att göra trådarnas form och strömmens uppkomst begripliga. I Molls bok saknades tyvärr en andra figur, som fullt motsvarar verkligheten, där trådarna således lågo i spår i järnet. Rudberg bortser i början från trådarnas form, men har statorns form riktig. Även här saknas tyvärr en figur, som motsvarar verkligheten. De båda framställningarna utgöra endast olika vägar till förståelse av den moderna maskinen. Båda sakna tyvärr en bild av en dylik maskin. Vilken väg är för eleverna lättare? Anmälaren vill för sin del ej dölja, att han tror, att det för eleverna är lättare att tänka sig trådhärvorna nedlagda i järnet i Molls figur än att tänka sig ett stort antal trådar i Rudbergs figur. I Molls figur gällde det en förflyttning av det, som fanns, i Rudbergs en ditläggning av trådhärvorna, som inte finnas. Ledningen är ju där en zick-zack-linje. — En praktiserande högskoleingenjör, som samtidigt är lärare i en teknisk skola, och med vilken anmälaren konfererat, ansluter sig fullständigt till de synpunkter, som här uttalats.

Om likströmsmaskiner gäller ungefär detsamma. Ringen är här både pedagogiskt och historiskt berättigad. Moll saknade även här en verklighetstrogen figur, som lätt förklaras genom att trådarna på ringen få gå tvärsöver dess ändar och icke igenom densamma. Lindningsdiagram, av vilka flera finnas, höra icke hemma i en lärobok som denna. Grammes ring kunde elever lära sig rita. Skola de numera rita trumankaret i stället? Övergången till maskiner med flera magnetpoler, som teknikens maskiner alltid ha, om man undantager de minsta, förefaller ske lättare enl. Moll än enl. Rudberg.

Enl. uppgift av tekniker kallas tre-fas-asynkronmotorn *induktionsmotor,* ej induktivmotor, såsom fallet är i Molls böcker. Något oegentligt är också att identifiera induktionsmotorn med tre-fas-motorn, såsom sker på sid. 123, då det finnes en tre-fas-synkronmotor, som enl. Molls framställning är mycket lätt och även intressant att förklara, och som

inom tekniken tycks vinna ökad användning, sedan den gjorts självstartande, på grund av fördelaktig inverkan på ledningsnätets effektfaktor. Omformarna vid banan Stockholm—Göteborg ha exempelvis överallt sådana motorer.

Bland i denna upplaga uteslutna apparater märkas *multiplikatorn* och *tangentbussolen*. Den förra sörjes säkert icke av någon. Den senare är lika värdelös som strömmätningsinstrument. Den synes dock anmälaren så nära höra ihop med Biot-Savarts lag och def. på enhet för strömstyrka, att den kunnat få behålla några rader såsom varande det instrument, med vilket definitionen förverkligats. Med hänsyn till det myckna nya, som kräver plats, torde nog nämnda lag och def. stå i tur att i nästa upplaga bli helt uteslutna.

Båglampans regleringsmekanism är utesluten, och givetvis med rätta. Kunde inte visartelegrafen och kanske Bohnenbergers elektroskop snart få följa med? Har »korresponderande rörelse hos två stift» (sid. 66), fått någon praktisk betydelse?

En och annan kliché borde ha utbytts, t. ex. fig. 84, ringklockan (kontaktfjädern *C* skall sitta på ankaret *B*; föranleder ofta missförstånd), fig. 86, relä (tydligare markering av strömmarnas gång), fig. 146, kraftöverföring (växelström för belysning, vilket är det vanligaste, finnes ej; spårvagnen saknar jordledning), fig. 151, telefon (jordledning användes praktiskt taget icke numera).

Ett och annat uttryck har anmälaren också fäst sig vid, såsom då det sid. 135 talas om glödkatodrör, som kopplas parallellt »med glödkatoderna åt motsatt håll», varigenom de »båda faserna hos en växelström likriktas». I tekniska likriktare äro rören kopplade med glödkatoderna åt samma håll, oftast, om man så vill uttrycka det, hopbyggda till ett rör med två anoder. Litteraturanvisning finnes i ett inlägg av anm. ang. likriktare i detta häfte. — Röntgenrör matas (sid. 129, not.) med ström från »växelströmsmaskiner»; strömmen likriktas, som bekant, innan den ledes till rören. — Röntgenstrålar förstöra »endast sjukliga partier»

i kroppen (sid. 128), är väl ej heller fullt korrekt uttryckt. — Herz' försök ägde enl. sid. 138 rum i mitten av 1800-talet. De uppges i litteratur till 1887.

Den formella redigeringen av arbetet har skett med en enastående noggrannhet och omsorg. Något tryckfel har anmälaren icke kunnat finna.

De positiva förtjänsterna av Moll-Rudbergs arbeten äro så stora samt så kända och erkända av de flesta sakkunniga, att det i en anmälan som denna icke tjänar något till att tala därom. Rudbergs sakkunskap och noggrannhet ha ökat värdet även av denna del av Molls arbete, såsom fallet varit med övriga delar. Att anmälaren sin plikt likmätigt ställt detaljer under diskussion, minskar på intet sätt arbetets många och stora förtjänster. Skulle det bli så, att alla lärare bleve fullkomligt nöjda med alla detaljer i en lärobok i fysik, skulle förhållandena inom den fysiskt-pedagogiska världen motsvara ett visst tänkt tillstånd inom värmeläran, som av Clausius betecknats som »värmedöden», ett tillstånd, inom vilket ingen vidare utveckling kan äga rum. Genom det väl valda innehållet och den mycket klara och koncisa framställningen kommer denna lärobok alltjämt att förbli de svenska gymnasiernas mest använda lärobok i ett av deras intressantaste, men också svåraste ämnen.

Magnus Lemoine.

Bror Christiansen och K. G. Karlsson, *Sveriges järnhantering*, Natur och Kultur, n:r 61, 1926, 160 sid. Kr. 3: —, häft. kr. 2: 25.

Efter en kort, orienterande översikt över järnframställningens grunddrag följa redogörelser för råvarorna (malm, kol, kalk), gruvhantering med anrikning, vidare rostning och brikettering, grunddragen av järnets metallografi och de olika järnsorterna, framställning av tackjärn i olika masugnar, tillverkning av smidbart järn, specialstål, till sist en kort historik över järnframställningens utveckling.

I denna del av den utmärkta serien Natur och Kultur

behandlas järnhanteringen och särskilt den svenska av en tekniker och en fysikalisk kemist, tillika pedagog, med en måttfull bredd, som gör den särdeles lämpad att studeras av kemilärare och intresserade elever. Av det välskrivna och lättlästa innehållet må här som särskilt förtjänstfullt framhållas kapitlet om järnets metallografi och den utförliga behandlingen av masugnsprocessens och färskningens kemiska förlopp. Ett stort antal goda bilder och statistiska tabeller öka arbetets värde.

Ett litet påpekande må här göras: på sid. 67 står, att helvitt tackjärn användes till mjuk martin, medan bild 30 säger hård martin. *G. S.*

KNUT BOHLIN, *Lärobok i kemi för realskolan och första gymnasieringen*, 4:e uppl. omarbetad under medverkan av NILS LÖFMAN, C. E. Fritzes förlag, 1927. 131 sid. Kr. 4: —, häft. kr. 3: —.

BOHLIN-LÖFMAN, *Kort lärobok i organisk kemi*, särtryck av föreg. 40 sid. Häft. kr. 1: 10.

BROR GUSTAVER, *Handledning vid kemiundervisningen i folkskolan*, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1926. 152 sid. Häft. kr. 3: 75.

VILHELM FLENSBURG och BENGT KJERRMAN, *Lärobok i järnets metallurgi jämte metallografi och tillverkningsstatistik*, C. W. K. Gleerups förlag, Lund, 1927. 195 sid. Häft. kr. 7: 50.

J. GUNNAR HOLMSTRÖM, *Handbok i radiotelegrafi och radiotelefoni*, 2:a uppl., P. A. Norstedt & Söners förlag, 1926. 400 sid. Kr. 10: 50.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

249) A är ena brännpunkten till en hyperbel. B är en punkt på samma sida om den närmaste hyperbelgrenen som A. P är en rörlig punkt på hyperbeln (på den ena eller andra grenen). Var skall P ligga för att $AP+PB$ skall bli ett minimum? *C. A. L.*

250) I en likbent triangel ligga höjdernas skärningspunkt, inskrivna cirkelns medelpunkt, tyngdpunkten och toppvinkelns spets harmoniskt och i angiven ordning. Sök vinklarna. *X.*

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

251) Lös ekvationen

$$\sin^4 x+\cos^4 x-1=\tfrac{1}{14}(\cos 5x-\cos 3x).$$

Svar: $\begin{cases} x_1=n\cdot 90^\circ \\ x_2=\pm 104^\circ,48+n\cdot 360^\circ. \end{cases}$

252) Vilken form har ett sfäriskt segment, där den buktiga ytan är konstant ($=\pi a^2$) och volymen ett maximum?

Svar: Ett halvklot.

253) Till hyperbeln $x^2-y^2=9$ är en tangent dragen parallellt med räta linjen $5x-4y+7=0$. Beräkna omskrivna cirkelns radie i den triangel, vars hörn äro tangeringspunkten och brännpunkterna. Svar: $5\frac{1}{8}$.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar godhetsfullt kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

254) Giv ekvationerna för de normaler, som från punkten (18; 12) dragas till parabeln $y^2=8x$.

Svar: $\begin{cases} y= & x-6 \\ y= & 2x-24 \\ y= & -3x+66. \end{cases}$

255) Vid uträknandet av en produkt av 2 hela tal kan man gå till väga på följande sätt. Man tager hälften av multiplikatorn och får sålunda en ny multiplikator; vidare fördubblar man multiplikanden och får sålunda en ny multiplikand, motsvarande den nya multiplikatorn. Med dessa nya faktorer förfar man på samma sätt som med de ursprungliga, då nya samhöriga faktorer uppkomma o. s. v., tills man fått multiplikatorn 1. Om en multiplikator är ett udda tal, avrundas dess hälft (den nya multiplikatorn) till närmast lägre heltal. Nu adderas alla de multiplikander, vilkas motsvarande multiplikatorer äro udda tal. Man får då den sökta produkten. (S. k. rysk multiplikation.)

Ex. 1.		*Ex. 2.*	
76 ·	13	53 ·	*23*
38 ·	26	26 ·	46
19 ·	*52*	13 ·	*92*
9 ·	*104*	6 ·	184
4 ·	208	3 ·	*368*
2 ·	416	1 ·	*736*
1 ·	*832*		1 219
	988		

Bevisa metodens riktighet.

Lösningar till uppg. 212 och 221.

212) *En triangel ABC och dess inskrivna cirkel äro givna. Till cirkeln drages en fjärde tangent, som skär AB och AC i resp. D och E. Vidare drages BH ⊥ DC och CK ⊥ EB. BH skär AC i H, CK skär AB i K. Sök enveloppen till linjen HK.*

Lösning I:

Vi beteckna sidorna BC, CA, AB i triangeln ABC med a, b, c, vinkeln BAC med α, avskärningarna AD, AE,

AK, AH med resp. x, y, x', y', tangenten DE (mellan D och E) med z och avståndet från vinkelspetsen A till den givna cirkelns medelpunkt med ϱ.

Då $CK \parallel EB$ och $BH \parallel DC$, har man, att

$$\frac{AK}{AC} = \frac{AB}{AE} \text{ och } \frac{AC}{AD} = \frac{AH}{AB},$$

varav

$$\frac{AK}{AD} = \frac{AH}{AE}$$

och således

$$KH \parallel DE.$$

Ur analogierna

$$\frac{x'}{b} = \frac{c}{y}, \quad \frac{b}{x} = \frac{y'}{c}$$

erhålles vidare

$$x'y = y'x = bc. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Enligt kända satser är vidare, alltefter läget av tangenten DE,

$$x + y \pm z = 2\varrho \cos\frac{\alpha}{2}. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ekvationen (med $+$ framför z) gäller tydligen även för det fallet, att tangenten DE skär AC resp. AB på förlängningen över A. I förra fallet erhålles ekvationen under formen

$$z + x - y = 2\left(\varrho \cos\frac{\alpha}{2} - y\right),$$

i senare fallet under den form, som uppkommer, om man i denna ekvation låter x och y byta plats.

Uttryckes z såsom funktion av x och y enligt cos-teoremet,

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha},$$

erhålles efter insättning i (2) och rationalisering av ekvationen (isolering av radikalen och kvadrering)

$$xy - \frac{\varrho}{\cos\frac{\alpha}{2}}(x+y) + \varrho^2 = 0. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Om vi i denna ekvation insätta de ur (1) erhållna uttrycken för x och y, erhålles motsvarande relation mellan x' och y',

$$x'y' - \frac{\left(\frac{bc}{\varrho}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}(x'+y')+\left(\frac{bc}{\varrho}\right)^2 = 0,$$

vilken är av samma form som (3), från vilken den skiljer sig endast däri, att konstanten ϱ blivit utbytt mot konstanten $\frac{bc}{\varrho}$. Man inser då, att den sökta enveloppen är en cirkel, likbelägen med den givna med avseende å punkten A och med medelpunkten på avståndet $\varrho' = \frac{bc}{\varrho}$ från nämnda punkt.

Beviset gäller, vare sig den givna cirkeln tangerar BC eller ej. Man kan således oberoende härav fastslå, att en inom vinkeln BAC belägen cirkel, som tangerar vinkelbenen AB och AC, genom den av dubbelformeln (1) karakteriserade transformationen övergår i en cirkel, likbelägen med den förra med avseende å punkten A. Betecknas avstånden från vinkelspetsen A till cirklarnas medelpunkter med ϱ och ϱ', har man $\varrho\varrho' = bc$. För $bc = \varrho^2$ övergår cirkeln i sig själv, varvid mot varje tangent till cirkeln svarar den därmed parallella tangenten.

Låt en cirkel med medelpunkten M på avståndet $AM = \varrho$ från vinkelspetsen A tangera vinkelbenen AB och AC, och låt PQ och P_1Q_1 vara två med varandra parallella cirkeltangenter. Betecknas tangenternas intercepter på vinkelbenen med x, y och x_1, y_1, har man då

$$x_1 y = y_1 x = \varrho^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Sätta vi nu

$$\frac{x_1}{x'} = \frac{y_1}{y'} = \frac{\varrho^2}{bc}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

återkommer vår transformationsformel (1).

Man finner sålunda, att transformationen (1) kan uppdelas i två transformationer (4) och (5). Genom (4) övergår

cirkeln M i sig själv, i det att mot varje tangent PQ till cirkeln svarar den därmed parallella cirkeltangenten P_1Q_1. Genom (5) blir cirkeln multiplicerad med avseende å vinkelspetsen A i förhållandet $\frac{bc}{\varrho^2}$. Den resulterande transformationen ger således en vinkelbenen AB, AC tangerande cirkel M', varvid mot varje tangent till cirkeln M svarar en därmed omvänt likställd tangent till cirkeln M'.

Transformationsformlerna (4) och (5) gälla fortfarande, om cirkeln M tangerar vinkelbenens förlängningar över A. Ligger den vinkelbenen tangerande cirkeln M däremot i någon av sidovinklarna, har man

$$x_1 y = y_1 x = -\varrho^2,$$

varefter man genom transformationen

$$\frac{x_1}{x'} = \frac{y_1}{y'} = -\frac{\varrho^2}{bc}$$

framkommer till (1). Cirkeln M blir således i detta fall multiplicerad med avseende å vinkelspetsen A i förhållandet $-\frac{bc}{\varrho^2}$.

Man finner sålunda, att en vinkelbenen tangerande cirkel M, belägen i vinkeln BAC eller dennas vertikalvinkel, övergår i en vinkelbenen tangerande cirkel M', liggande i *samma* vinkel. Ligger den vinkelbenen tangerande cirkeln M däremot i någon av sidovinklarna till $\angle BAC$, kommer cirkeln M' att ligga i den *motsatta* sidovinkeln. Tangerar cirkeln M även sidan BC, kommer cirkeln M' att likaledes tangera denna linje. Den i triangeln ABC inskrivna cirkeln övergår således i den av $\angle BAC$ omfattade vidskrivna och omvänt, de båda andra vidskrivna i varandra.

Uppgiften kan ytterligare generaliseras på följande sätt: Underkastas figuren en homografisk transformation, genom vilken cirkelpunkterna på oändlighetslinjen bringas att falla i var sin av två andra (imaginära och konjugerade eller reella) oändlighetspunkter, övergår cirklarna till två

medelpunktskägelsnitt med gemensamma oändlighetspunkter. Den ursprungliga transformationen bibehåller härvid sin karaktär, ty då oändlighetslinjen svarar mot sig själv, komma sinsemellan parallella linjer att motsvaras av andra sinsemellan parallella. Om DE tangerar ett medelpunktskägelsnitt med AB och AC till tangenter, kommer HK således att enveloppera ett med nämnda kägelsnitt homotetiskt kägelsnitt. Satsen kan tydligen icke utsträckas till parabeln, enär man ju icke genom någon homografisk transformation kan bringa cirkelpunkterna på oändlighetslinjen att koincidera.

Iter, vilken lämnat ytterligare tre lösningar till samma uppgift.

Lösning II (med någon förenkling av red.).

Man har, om $KH=z'$,

$$\frac{z}{z'}=\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}$$

och

$$\frac{x'}{b}=\frac{c}{y},$$

varav

$$\frac{z}{z'}=\frac{xy}{bc}.$$

Vidare fås genom att betrakta ytorna av trianglarna ABC och ADE

$$\frac{xy}{bc}=\frac{x+y-z}{a+b+c}$$

$$\because \frac{z}{z'}=\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{x+y-z}{x'+y'-z'}=\frac{x+y-z}{a+b+c}$$

$$\because x'+y'-z'=a+b+c$$

eller $$z'+a=(x'-c)+(y'-b),$$

vilket visar, att en cirkel kan inskrivas i fyrhörningen $BCHK$.

C. P.

Lösning III.

Låt oss i triangeln ABC betrakta den inskrivna cirkeln I och den vid sidan BC vidskrivna I_a. I tangerar AB och AC i P och Q resp., I_a i P_1 och Q_1 resp. Radikalaxeln till I och I_a, vilken delar såväl yttre som inre gemensamma tangenter mitt itu, går mittemellan PQ och P_1Q_1 samt delar BC mitt itu i M. PQ och P_1Q_1 ligga därför symmetriskt med avseende på M. Om nu DE är en tangent till I, råkas (enligt t. ex. BRIANCHONS teorem) CD och BE på PQ. Följaktligen råkas BH och CK i vår sats på P_1Q_1, och HK är alltså en tangent till I_a, som således är den sökta enveloppen. *X*, vilken även generaliserat uppgiften.

221) *x_1 och x_2 äro rötterna till ekv.*

$$ax^2+(a^2+1)x+a^2+1=0.$$

a väljes så, att ekv. $ax^2+(a^2+1)x+(a+1)^2=0$ får dubbelrot. Beräkna $(x_1^2-x_2^2)^2$. *X.*

Lösning. Då den andra ekvationen skall ha en dubbelrot, måste a satisfiera ekvationen

$$(a^2+1)^2-4a(a+1)^2=0.$$

Diskriminanten till ekvationen

$$x^2+\frac{a^2+1}{a}\cdot x+\frac{a^2+1}{a}=0$$

är då

$$(x_1-x_2)^2=\left(\frac{a^2+1}{a}\right)^2-\frac{4(a^2+1)}{a}=\frac{(a^2+1)^2-4a(a^2+1)}{a^2}$$

$$=\frac{(a^2+1)^2-4a(a+1)^2+8a^2}{a^2}=8.$$

Vidare är

$$x_1+x_2=-\left(a+\frac{1}{a}\right)=-2k,$$

$$x_1x_2=a+\frac{1}{a}=2k.$$

Ur identiteten

$$(x_1+x_2)^2=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2$$

får man då $4k^2=8+8k$

eller $k^2-2k=2,$

varav $k=1\pm\sqrt{3}.$

Man har då

$$(x_1^2-x_2^2)^2=(x_1+x_2)^2(x_1-x_2)^2=32k^2=64(2\pm\sqrt{3}).$$

Fordras därjämte, att a skall vara *reell*, måste det undre tecknet förkastas. Ty villkoret för att ekvationen

$$a+\frac{1}{a}=2k$$

eller

$$a^2-2ka+1=0$$

skall ha reella a-värden är, att $k^2-1\geqq 0$ eller $k\geqq 1$.

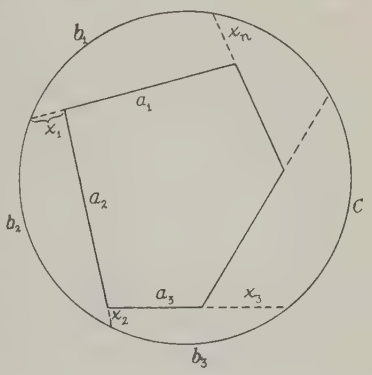
Iter.

Förenklad framställning av läran om hörn.

Av HENRIK PETRINI.

I Eukl. I och III bevisas åtskilliga satser utan användning av parallellaxiomet, vadan de även gälla för sfäriska figurer, där storcirkelbågar svara mot räta linjer, dock med vissa inskränkningar i fråga om linjernas längder. Dessa satser gälla även för sidovinklarna i ett hörn. Man tar nämligen hörnets spets till medelpunkt och beskriver en sfär med en godtycklig radie r. Hörnet avskär då på sfären en figur, varvid en plan sida avskär en storcirkelbåge och en konisk sida avskär en cirkelbåge. Den grundläggande satsen i läran om hörn är den, att summan av två sidovinklar i ett tresidigt hörn är större än den tredje. Denna sats följer omedelbart ur satsen, att summan av två sidor i en triangel är större än den tredje, vilken även gäller om sfäriska trianglar, där varje sida är mindre än halva storcirkellinjen.

Ty äro hörnets sidovinklar α, β och γ radianer, så bliva den avskurna sfäriska triangelns sidor $r\alpha$, $r\beta$ och $r\gamma$ resp. Men $r\alpha + r\beta > r\gamma$, $\because \alpha + \beta > \gamma$.



Lika omedelbart och åskådligt bevisas den allmänna satsen om ett konvext hörn, att summan av sidovinklarna är $< 4R$, men härför erfordras följande hjälpsats ur plangeometrien.

Hjälpsats. Om en cirkellinje omsluter en konvex polygon, så är polygonens omkrets mindre än cirkelns. Ty (se fig.) $a_1 + x_1 < b_1 + x_n$; $a_2 + x_2 < b_2 + x_1$ etc., $\because \Sigma' a + \Sigma' x < < b + \Sigma' x$, $\because \Sigma' a < \Sigma' b$.

För ett konvext hörn med sidovinklarna α_1, α_2 etc. bliva den motsvarande sfäriska polygonens sidor $a_1 = r\alpha_1$ etc. Låter man den omslutande cirkeln vara en storcirkel, så fås $\Sigma' r\alpha < 2\pi r$, $\because \Sigma' \alpha < 2\pi$.

Anm. Är hörnet sådant, att det faller inom en rät kon med samma spets, så tages konens avskärning med sfären till cirkeln C. Då dess omkrets är $2\pi r$ sin V, där V är halva toppvinkeln, så fås $\Sigma' \alpha < 2\pi$ sin V.

Om räkning med närmevärden i realskolans matematikkurs.

Av SIGFRID HERMANSSON.

Ett betyg över avlagd realskolexamen utgör ju ett bevis, att dess innehavare skall anses inneha ett visst mått av allmänt medborgerlig bildning, som skall göra honom särskilt användbar i det praktiska livet och i det allmännas tjänst i vissa befattningar, som man ibland får se uppräknade i t. ex. mellanskoleredogörelser.

Men från det »praktiska livets» företrädare får man ofta höra klagomål över att de examinerade ej ha kunskaper, som motsvara förväntningarna, eller åtminstone att deras förmåga att tillämpa kunskaperna är ringa. Vad beträffar matematiken, är det ej ovanligt, att skolan får uppbära klander för den s. k. skolmatematiken; det påstås, att matematiken i skolan drives för mycket för sin egen skull, samt påyrkas, att man bör inskränka kursen till »vad man sedan i praktiken har användning för».

Det ligger i öppen dag, att denna kritik är i hög grad överdriven. Den skola är ej uppfunnen, som gör eleverna beredda att omedelbart sköta en syssla av sådan art, att den fordrar förmåga att praktiskt i större utsträckning tillämpa inhämtade kunskaper. Och att i skolan behandla endast »vad man sedan praktiskt behöver» går knappast ens i en fackskola, ännu mindre i realskolan med dess *allmänna* undervisningsuppgift.

Detta hindrar dock ej, att man måste, så långt det är rimligt och möjligt, gå praktikens krav till mötes, och det må ej heller förnekas, att kritiken dock har *något* berättigande. Matematikundervisningen *kan* dock bedrivas så,

att den blir mera minneskunskap än förståndsutvecklande och ger kunskaper blott för stunden. Men den bör i stället söka tvinga eleverna att, i den mån deras åldersstadium gör det möjligt, uppöva sin tankeförmåga och således vänja dem vid så självständigt arbete som möjligt. Därigenom vinner man också den bästa garantien för att de sedermera ej stå handfallna inför tillämpningarna.

Tanken härpå bör ej släppas vid valet av räkneexempel, dessas gruppering och behandling. Men det är dock *vissa* detaljer av matematikkursen, som mer än andra påfordra en dylik praktisk behandling, och som därvid kunna ge icke blott praktiskt nyttiga kunskaper utan även en uppövning av elevernas praktiska förstånd. En sådan detalj är bedömmandet av pålitligheten hos ett resultat, speciellt räkning med närmevärden.

Det förefaller emellertid, som om man i detta avseende kunde finna större osäkerhet eller rentav okunnighet än på något annat område inom matematikkursen hos realskolans lärjungar, ja för övrigt även gymnasiets. Man kan få se exempel på sifferbehandling och räkning med närmevärden, som äro nästan otroligt klumpiga eller felaktiga. Det synes ofta vara så, att antalet siffror i ett närmevärde bestämmes på måfå utan öppen blick för siffrornas betydelse.

Söker man orsaken till den stora osäkerheten på detta område, så må först dettas svårighetsgrad erkännas. Men måste man icke dessutom erkänna, att ett bristfälligt system vid undervisningen ibland förekommer och får stöd i vissa läroböcker? Det torde icke vara ovanligt, att behandlingen av frågan om ett problemsvars noggrannhet, ja t. o. m. denna frågas existens, fördöljes för lärjungarna under nästan hela realskoletiden, för att sedan, och kanske först i sista klassen, tagas upp till en mer eller mindre systematisk behandling, oftast då i samband med det lilla kapitel om kvadratrötter, som läses i denna klass. Då är det emellertid för sent; eleverna äro vana att förbise saken; framlägges nu denna kanske i form av abstrakta

regler, förmå de ej smälta dessa, och de ha för kort tid att stå kvar under träning, för att inrotade ovanor skola kunna bortläggas.

Hur långt bör man då sträcka fordringarna i real- och mellanskolan i det ifrågavarande avseendet? Och vad bör man iakttaga för att nå så långt som möjligt däri? Efterföljande avser att vara ett försök att komma till rätta med dessa frågor liksom även en blick på ett par läroböcker för realskolan.[1]

Nyss nämndes, att det ofta i samband med läran om kvadratrötter gives en mer eller mindre systematisk kurs i räkning med närmevärden. BH anslår t. o. m. 4 sidor (del III sid. 55—58) till en på differentialräkning stödd bevisföring för en del räkneregler; visserligen finner man den anmärkningen i en not, att dessa sidor äro skrivna för ett högre stadium; men varför då alls medtaga dem i en för realskolan skriven lärobok?

Överhuvudtaget är det nog ej behövligt med så många regler; de ge ej ens den bästa behållningen. Man får ej spänna bågen för hårt. Med hänsyn till elevernas utvecklingsstadium får man, i stället för en systematisk framställning, i allmänhet nöja sig med att framhålla enstaka fall, inöva dessas tillämpning samt i övrigt väcka elevernas eftertanke, så att de ej komma fram med *alltför* orimliga resultat. Men man får ej börja för sent därmed; redan i nederklassernas aritmetikkurs kan en ringa början göras.

Väl är det sant, att man t. ex. vid läran om decimalbråk måste tillse, att eleverna i de formella övningarna lära sig utföra multiplikationer och divisioner med hur många siffror som helst, och att man alltså därvid måste räkna

[1] BH = Berg-Hagström, Räknelära, I, II, III, Sthlm 1924, 1925 och 1911 resp.
L = Lindblad, Lärobok i matematik f. komm. mellanskolor, Sthlm 1926.
MH = Meyer-Hedström, Exempel till ekvationsläran, Sthlm 1926.
MLL = Möller-Larsson-Lundahl, Lärobok i räkning I, II, Sthlm 1917 och 1914 resp.
U = Uddholm, Matematik, Realklassens kurs, Sthlm 1925.

med siffertal, som antagas exakta. Men man tvingas till slut att taga ställning till de fall, då ett decimalbråk måste avkortas. Ofta behandlas den saken på ett alltför schablonmässigt sätt. Sedan det t. ex. påvisats, att vissa divisioner aldrig gå jämnt upp utan leda till ändlösa decimalbråk, nämnes, att man måste nöja sig med ett fåtal decimaler, och man ger kanske sedan ett antal övningsuppgifter med tillsägelsen: »Beräkna med 3 decimaler...». Undra sedan på, att eleverna vid tillämpningarna längre fram ofta nog antingen utan eftertanke medtaga 3 decimaler i svaret eller också av läraren begära noggranna order om antalet decimaler, som skall medtagas! I läroböckerna påpekas (MLL del I, sid. 71, BH del I, sid. 119), att man vid multiplikation kan få flera decimaler i produkten, än man är betjänt av. Även här inövas avkortningen mestadels först medelst en del obenämnda exempel med t. ex. 3 decimaler begärda i svaret; vidare några benämnda exempel, alltså tillämpningsövningar, vilka mestadels handla om kronor och öre. I sistnämnda fall, som ju är mycket lämpligt för de första övningarna, blir det ju självklart, att man mestadels söker ge svaret på ett halvt öre när. Av andra tillämpningar finnas ej många i läroböckerna; BH har dock ett par, likaså MLL, men de sistnämnda äro ej tillfredsställande behandlade. I texten läses bl. a. »— — — medtagas endast två decimaler, då svaret är en penningsumma, som skall betalas, och denna är uttryckt i kr. I övriga fall är det vanligen tillräckligt att uttrycka svaret med 3 decimaler.» Hur missvisande sistnämnda regel är, framgår bäst av ett av de i boken följande exemplen, n:r 203, där vikten av 100,75 hl havre efter 50,37 kg per hl i facithäftet angives tlll 5074,778 kg. Vikten av c:a 100 hl havre angives således på halvt gram när!

En god hjälp att lära eleverna att bättre bedöma dylika fall kan matematikläraren få vid fysiklaborationerna i realskolans fjärde (mellanskolans andra) klass. Antag t. ex., att eleverna fått uppmäta svarta tavlans längd och höjd

för att beräkna dess yta. De finna $l = 264$ cm och $h = 117$ cm samt beräkna $117 \cdot 264 = 30888$, men man tillser i deras koncept till laborationsredogörelsen, att de ej ge svaret 30888 cm^2, utan man leder dem fram till resultatet 30900 cm^2, eller 3,09 m^2, varvid man ju samtidigt får tillfälle rätta ett ofta förekommande missförstånd; det synes av exemplet, att decimalkommats plats är utan betydelse för noggranheten hos svaret, och att den så vanliga frågan: »hur många decimaler?» skall utbytas mot: »hur många siffror skall medtagas i svaret?» Vidare kan man se, att antalet gällande siffror i svaret ej gärna kan vara större men väl mindre, än i primäruppgifterna. Det kan ej heller skada, att man på aritmetisk väg uppvisar, att felet i ovanstående resultat kan stiga till ett par enheter i tredje siffran, ifall längdmätningarna äro gjorda på $\frac{1}{2}$ cm när.

Anledningen till att man ibland bortkastar en del siffror i ett resultat, kan tydligen vara den, att man ej behöver dessa siffror, såsom i många fall, då det är frågan om kr. och öre. Men ännu oftare är orsaken den, att dessa siffror ej äro med säkerhet kända. Man låter då så många siffror medfölja, att endast den sista medtagna siffran blir behäftad med något fel. Håller man på den principen, kan man vid övningarna t. ex. slippa se ett ämnes spec. vikt bestämd med 7 siffror!

En annan detalj, som man också får tillfälle att vid laborationerna noga inskärpa i minnet, är betydelsen av en nolla i slutet av ett decimalbråk. Från den elementäraste aritmetikundervisningen kommer eleven ofta med den — i fråga om *exakta* tal alldeles riktiga — föreställningen, att en sådan nolla är betydelselös och utan vidare kan bortkastas. Så snart man börjar påträffa närmevärden, måste man emellertid visa upp, att en nolla i slutet av ett sådant tal har en viktig uppgift att fylla och därför ej får bortkastas: den skall angiva närmevärdets noggrannhet. Skola vi t. ex. förvandla (det exakta) talet $\frac{1}{2}$ till decimalbråk, kunna vi lika gärna svara 0,5 som 0,50 eller 0,500 o. s. v. Men ha vi uppmätt en sträcka medelst ett i mm

graderat måttband och funnit 5 dm 0 cm 0 mm, skola vi svara 0,500 m, ej 0,5 m.

Om vi nu vid en laborationstimme låtit eleverna uppmäta t. ex. diametern hos en metalltråd, kan man i något protokoll få se följande tabell över erhållna värden: 1,09 mm, 1,11 mm, 1,1 mm, 1,12 mm, 1,13 mm; medeltal 1,11 mm (5 mätningar, utförda medelst mikrometerskruv). En sådan tabell får ej passera oanmärkt. Enär tabellens tredje värde erhållits genom lika noggrann mätning som de övriga, måste det rättas till 1,10 mm. — Eller en elev antecknar, att en degel med innehåll väger 17,36 gr och tom 16,9 gr. Rättelse: 16,90 gr. Det är icke mycken nytta med att angiva en term på ett cg när, om en annan term, som skall tilläggas eller fråndragas, är given på ett dg när.

Under aritmetikkursen samt under de första problemlösningsövningarna efter ekvationsmetoden är nog framläggandet av dylika enstaka fall det enda, som kan positivt uträttas. Men samtidigt bör man tillse, att det genomgångna tillämpas konsekvent, och det ligger stor vikt vid, att inga olämpliga eller missvisande exempel väljas, och att facitsvaren föregå med goda föredömen. Ett och annat exempel, som borde bortrensas eller omredigeras, förekommer nog i läroböckerna. Förut är nämnt, hur i en lärobok vikten av ett mycket stort parti havre beräknas på $\frac{1}{2}$ gr när. Ett annat exempel (L n:r 868) må här citeras: »Ett luftskepp tillryggalägger 80 km på 45 min. 20 sek. Hur lång tid borde det med denna hastighet åtgå för en färd från Örebro till Boden? På en karta i skalan 1 : 5 000 000 är kortaste vägen mellan dessa orter 2 dm.» Förf. uppmäter alltså ett avstånd av 2 dm, multiplicerar detta mätetal (och felet däri) med 5 000 000 och är därefter beredd att i facit ge svaret 9 tim. 26 min. 40 sek.!

Här skall ej alls framställas det yrkandet, att alla exempel i läroböckerna skola grunda sig på verkliga mätresultat eller fingerade sådana och nödvändiggöra felberäkning eller felets uppskattning. En så beskaffad exempelsamling bleve väl svår och tidsödande. De flesta

exempel äro och måste vara grundade på tänkta eller idealiserade fall, där de förekommande storheternas mätetal antagas vara *exakt* givna tal. Om man då t. ex. talar om en rektangel med sidorna 5 cm och 6 cm, tänker man sig en rektangel med exakt dessa dimensioner och alltså med ytan exakt 30 cm^2. Men om problemet är så formulerat, att det ger sig sken att vara byggt på en utförd mätning, måste det behandlas, som om det vore så. Man kan mycket väl *tänka sig* en karta, fullt riktigt gjord i skalan 1 : 5 000 000, och på denna karta två punkter med ett avstånd av exakt 2 dm, samt räkna exempel, som handla om dessa. Men *mäter* man på en karta avståndet mellan två namngivna orter, måste man ihågkomma, dels att redan ett mätfel av 1 mm i ovanstående exempel (motsvarande värdet 2,00 dm i stället för 2 dm) betyder ett verkligt fel av 5 km, motsvarande en tid av bortåt 3 min. med den angivna hastigheten, dels att ett svar på 10 sek. när skulle förutsätta, att vägen kunde bestämmas på c:a 300 m när, så att t. o. m. startplatsens läge i Örebro inverkar på ett sådant svar.

Att man vid de formella övningarna måste räkna med tänkta fall, som knappast kunna erhållas som mätresultat, och som därför måste i viss mening betecknas som opraktiska, därpå utgöra de brukliga övningarna i *sortförvandlingar* exempel. Om man för övnings skull låter eleverna förvandla 12 900 005 cm^3 till de olika sorterna, är uppgiften opraktisk, ty sällan eller aldrig torde man i praktiken kunna fästa avseende vid 5 cm^3 uti en volym av närmare 13 m^3. Men ändamålet, säkerhet i räkning med sorterna, nås knappast, om man skall hålla sig till endast mätetal med ett fåtal siffror. Det skadar dock ej, om läraren vid dessa övningar upplyser klassen om övningarnas formella natur. Och så snart tillämpningarna komma, måste förnuftiga sifferbehandlingsmetoder komma till användning. Ett par exempel på olämpliga facitsvar må här angivas. MLL (del II, facit till ex. 74 sid. 258) uträknar för ett rum i form av en kub med 3,75 m kantlinje en volym

av 52 m^3 734 dm^3 375 cm^3. Samma ställe, ex. 73 b: ytan av en cirkel med 19,98 dm omkrets = 31,7529 dm^2; i första fallet alltså 8 siffror i svaret, i sista fallet 6, varvid till på köpet ett närmevärde för radien = 3,18 dm (tresiffrigt) använts jämte π-värdet 3,14 (tresiffrigt). Ett par stickprov till ur MLL: facit till ex. 200 sid. 271 ger vikten av ett järnrör med 8 siffror och på milligrammet, då rörets längd = 2 m, $D = 12{,}8$ cm och $d = 12{,}4$ cm, samt järnets spec. vikt = 7,3. Ex. 198 på samma ställe ger bottenytan av ett mjölkglas likaledes med 8 siffror (och på 0,0001 mm^2 när). I de båda sistnämnda fallen stå visserligen de anförda värdena inom parentes, och det egentliga svaret är 4- resp. 3-siffrigt, men detta kan, åtminstone om det sker såsom å det anförda stället, ej anses som i nämnvärd grad förmildrande omständighet, då i alla fall genom dessa svar ett felaktigt betraktelsesätt uppammas och ett opraktiskt sätt att räkna inläres.

Även ur ett par andra böcker må ett par stickprov tagas. L sid. 106 n:r 1162 ger ett svar med 5 siffror, sedan π-värdet 3,14 kommit till användning. Liknande fel finnes i BH, facit till ex. 317, sid 132, del II: en cirkelrings yta skall beräknas; $D = 43$ cm, $d = 21$ cm, $\pi = \frac{22}{7}$; facit 1106,3 cm^2. Likaså MH (ex. 631); U (ex. 34 sid 57, där $56\pi = 56 \cdot 3{,}14 = 175{,}84$).

Särskilt i MLL samt i L är det gott om fel av här exemplifierat slag, medan de tre övriga här nämnda böckerna synas ha bättre lagt an på en riktig behandling av närmevärdena.

Med de sist valda exemplen ha vi kommit in på kapitlet om de planimetriska och stereometriska beräkningarna, vilket ju till sin huvudsakliga del är förlagt till femte klassens kurs. Vid dessa beräkningar har man gott om tillfällen att ytterligare inöva tillämpningen av de synpunkter, som här förut nämnts. — I detta sammanhang göra eleverna den första mera grundliga bekantskapen med det irrationella talet π. I fråga om detta tal angiva läroböckerna ofta ett

visst närmevärde, som vid facitsvarens uträkning använts, »då ej annat säges». Härom är i och för sig intet att säga; dock vore det bra, om eleverna också i någon mån finge öva sig att själva välja ett lagom noggrant närmevärde för π, avpassat efter problemets behov; vidare måste facitsvaret ovillkorligen i fråga om noggrannheten ansluta sig till det valda π-värdet, om ett sådant angivits. Som ovan nämnts, kan i detta avseende åtskilligt anmärkas mot läroböckernas facithäften. Vill man vara konsekvent, bör man, då man använder närmevärdet $\frac{22}{7}$, betrakta detta såsom ett närmevärde med 3 korrekta siffror och alltså i svaret medtaga samma antal siffror, som vid användandet av närmevärdet 3,14. T. ex. omkretsen av en cirkel med 7 cm diameter $=$ $= \pi \cdot 7$ cm $= \frac{22}{7} \cdot 7$ cm $= 22{,}0$ cm, ej 22 cm, såsom vanligen svaras.

I samband med hithörande prolem må man ej försumma att ge ett praktiskt råd av stor betydelse: Insätt närmevärden för de irrationella talen (i detta fall π) så sent som möjligt, helst ej förrän strax innan det slutliga svaret till problemet skall avges. Bokstaven π är symbolen för det exakta värdet av förhållandet mellan omkrets och diameter hos en cirkel, och så länge denna symbol användes, är det tecknade uttrycket exakt (därest övriga ingående storheter äro det). Först vid en omvärdering av detta irrationella uttryck till de tal, vi äro mera invanda vid, de rationella, blir det omöjligt att längre upprätthålla något krav på exakta värden. En nybörjare vill i stället insätta ett närmevärde för π så snart som möjligt. Samma synpunkter framkomma vid räkning med kvadratrötter.

Exempel: Förutnämnda ex. 73 b ur MLL del II sid. 258: Nybörjaren vill räkna: Omkretsen $= 2\pi r = 19{,}98$ dm; $r =$ $= \frac{19{,}98}{2 \cdot 3{,}14}$ dm $= 3{,}182$ dm; ytan $= 3{,}14 \cdot 3{,}182 \cdot 3{,}182$ dm$^2 =$ $= 31{,}8$ dm. Han bör i stället läras att räkna: Omkretsen $=$

$= 2\pi r$ dm $= 19{,}98$ dm; $r = \frac{19{,}98}{2\pi}$ dm $= \frac{9{,}99}{\pi}$ dm; ytan $=$

$= \pi \cdot \frac{9{,}99 \cdot 9{,}99}{\pi \cdot \pi}$ dm$^2 = \frac{9{,}99 \cdot 9{,}99}{\pi}$ dm $= 31{,}8$ dm^2. Härigenom vinnes flera fördelar. 1) Sifferräkningarna bli ofta enklare. 2) För ett och samma val av närmevärde på π noggrannare slutresultat. 3) Det är ofta svårt att från början kunna förutse, hur noggrant π-värde, man behöver.

För att tvinga eleverna att räkna på detta sätt med de irrationella talen kan man göra så, att man vid alla räkneövningar och provräkningar fordrar, att svaret skall avgivas dels exakt (med symbolerna π och rotmärke etc.), dels approximativt. Om i ovanstående exempel såväl radien som ytan efterfrågas, måste r-värdet approximeras, men för de fortsatta beräkningarna lägges dock det exakta uttrycket till grund.

I de klassavdelningar, där man medhinner det, och som äro en smula mera försigkomna i ämnet matematik, kan man efter de förberedelser, som på här angivet sätt erhållits, lättare än eljest våga sig på den sammanfattande framställning angående räkning med närmevärden, som ofta ges i samband med räkning med kvadratrötter; medhinnes den ej, t. ex. i mera efterblivna klasser, är ej stor skada skedd, då de viktigaste synpunkterna i alla fall kommit till sin rätt vid undervisningen. Under alla omständigheter bör den grundas på rent aritmetiska undersökningar utan några abstrakta härledningar.

Om ljusets brytning i en plan vattenyta.

Av ANTON FRENDEL.

IV. Objektivt framvisande av normalbilden och den utomnormala bilden på en skärm.

Fig. 7 visar försöksanordningen. I den förut nämnda glasvannan, som är till överkanten full med vatten, har jag utmed den bakre kortväggen stuckit ned en zinkplåt, som på ett ställe är genomborrad av ett litet cirkelrunt hål *E*. Hålet belyses genom en glödlampa, placerad inom en låda av kartong. Framför glasvannan placeras en bikonvex lins *C* fastsatt i en pappskiva, det senare för att hindra andra strålar att passera än de, som tränga genom linsen. Bilden av öppningen *E* uppfångas sedan på skärmen *K*. Rummet göres mörkt under försöket. För att icke bilden av glödlampan skall störa, placeras lampan något åt sidan, så att inga direkta strålar från lampan kunna inträngа i linsen. Lampan får i stället belysa papplådans bakre vägg, som har en ojämn yta, så att de strålar, som genom öppningen *E* inkomma i linsen *C* utgöres av diffust ljus från pappväggen. Linsen placeras på ett avstånd från *E* eller rättare från *G* lika med dubbla brännvidden, så att bilden *D* kommer att falla ungefär i brytningscentrum. Då blir ju bilden i *D* varken förstorad eller förminskad, utan man kan på skärmen få en trogen avbildning av de olika bilder, som tyckas uppkomma av de strålar vilka, utgångna från *E*, efter brytningen i vattenytan infalla i linsen *C*. Närmar jag nu skärmen *K* från stort avstånd mot linsen *C*, så blir första skarpa bild som uppkommer i *D* en i horisontal led utdragen ljusyta (se *N* på fig. 7). Denna motsvarar den förut omnämnda utomnormala bilden av öppningen *E*.

Närmar jag skärmen ytterligare genomlöper bilden de

stadier, som synas på fig. 7: *N*—*R*. Det utvecklas från mitten en vertikal ljuslinje, som växer, medan den horisontella ljusytan avtar. I ett visst läge (fig. 7: *P*) äro utbredningarna åt båda hållen lika långa, och bilden visar en fyrkantig ruta genomlöpt av en vertikal ljusstrimma, som är starkare markerad än det övriga. Därefter blir den horisontella utbredningen kortare än den vertikala och försvinner till sist alldeles. Då har den vertikala *normalbilden* (fig. 7: *R*)

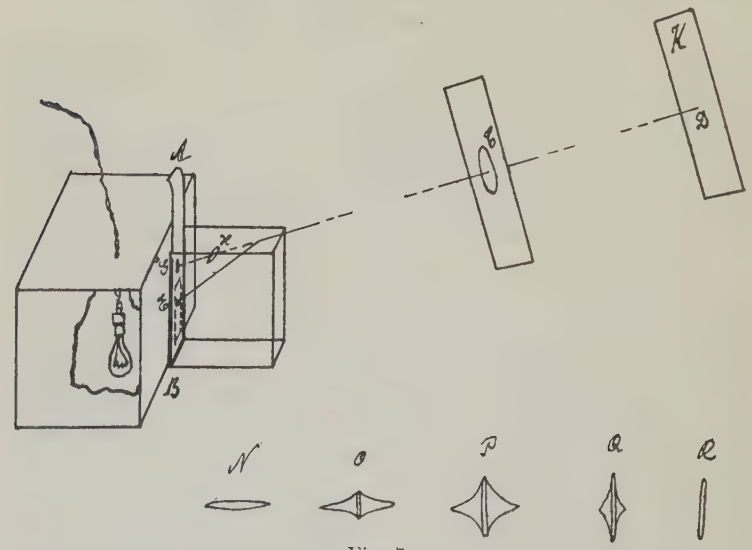


Fig. 7.

framkommit. Ljusknippet företer med andra ord det fenomen, som man brukar beteckna med *astigmatism*. Att astigmatism förekommer vid ett ljusknippes brytning i en plan vattenyta finnes omnämnt och redogjort för på en del håll i den fysiska litteraturen, så t. ex. i Kaysers Handbuch der Spectroskopie, enligt vad professor Gudmund Borelius gjort författaren uppmärksam på.

Känner jag linsens brännvidd, kan jag nu, om jag uppmäter avståndet *CD*, beräkna lägena *H* och *S* av de båda bilderna medelst linsformeln $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Härnedan lämnas några siffror från ett dylikt försök. Bildavståndet för den utomnormala bilden kallar jag CD_1 och för normalbilden CD_2. Tre försök äro utförda med varierande avstånd mellan linsen och glasvannan. Centralstrålen i det använda ljusknippet lämnade vattenytan med c:a 80° brytningsvinkel.

CD_1 (obs.)	CH (ber.)	CD_2 (obs.)	CG (ber.)	CG (obs.)	CG (ber.) — CH
39,7 cm	24,6 cm	31,0 cm	29,4 cm	30,0 cm	4,8 cm
27,0 »	34,8 »	24,6 »	39,8 »	40,0 »	5,0 »
22,4 »	47,8 »	21,6 »	52,5 »	50,0 »	4,7 »

Som synes, överensstämmer det beräknade avståndet CG för normalbilden någorlunda med det uppmätta (30 cm, 40 cm och 50 cm resp.). Den utomnormala bilden ligger 4,7 à 5 cm framför normalbilden.

Därefter upprepade jag försöken, nu med användande av föremål med utsträckning, men utan att göra några mätningar. Först ersatte jag plåten AB med en annan, i vilken jag borrat ett cirkelrunt hål med 5,6 mm diameter. Sedd med blotta ögat under en brytningsvinkel i vattenytan av c:a 80° företedde den normalbilden av en långsträckt ellips med horisontell storaxel. Lillaxeln, som låg i ett vertikalt plan var endast c:a $^1/_4$ så lång som storaxeln. Tillplattningen beror därpå, att när föremålen tyckas upplyftade, förkortas alla vertikala avstånd, medan däremot de horisontella bli oförändrade. När jag projicerade de båda bilderna av detta »föremål» på skärmen blev jag något förbluffad över att finna, att den utomnormala bilden framträdde skarpare än normalbilden. Jag förklarade emellertid detta faktum bero på bildens avplattning. Hos den utomnormala bilden komma då de brännytor, som alstras av varje särskild föremålspunkt att falla utefter hela bildens längdutsträckningsriktning (*c* i fig. 8: *I*), medan hos normalbilden de brännlinjer, som alstras av varje särskild föremålspunkt stå vinkelrätt mot bildens längdutsträckningsriktning (*d* i fig. 8: *I*). I förra fallet komma brännytorna att till större

delen falla *inom* bilden (d. v. s. falla på varandra) och särskilt bli över- och underkanterna skarpa (punkterna 2 och 4 i *c* av fig. 8: *I*). I senare fallet komma brännlinjerna i stor utsträckning att ligga *utom* bilden (falla bredvid varandra) och endast sidokanterna bli skarpa (punkterna 1 och 3 i *d* av fig. 8: *I*).

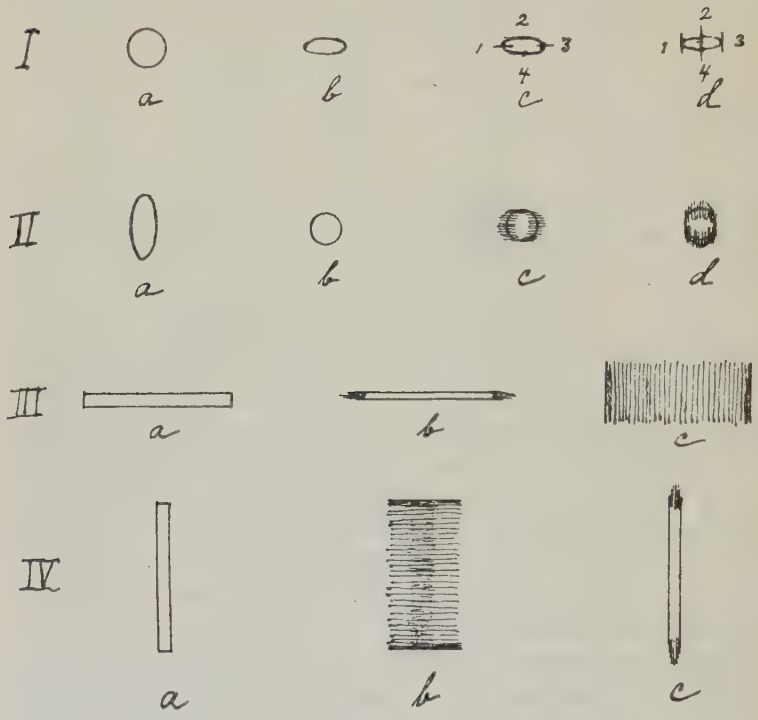


Fig. 8.

För att pröva denna förklarings riktighet varierade jag försöket sålunda: I stället för blecket med det cirkelrunda hålet satte jag i glasvannan ett bleck, i vilket jag utskurit ett hål i form av en ellips med storaxeln lodrät. Sedan sökte jag ut ett ställe framför vannan, från vilket denna ellips syntes hoptryckt till en cirkel. Där insatte jag linsen och projicerade som förut bilderna på en skärm. Om min

förklaring var riktig, skulle nu den utomnormala bilden ej längre framträda skarpare än normalbilden. Så blev ej heller förhållandet. Resultatet är avbildat i fig. 8: *II*, där *a* betyder den ellipsformiga öppningen, *b* densamma sedd med blotta ögat som en cirkel efter brytningen i vattenytan och *c* och *d* äro projektionerna på skärmen av den utomnormala bilden och normalbilden. Normalbilden syntes nu väl så skarpt som den utomnormala.

Därnäst undersökte jag bilderna av en öppning i form av en långsträckt liggande rektangel (se fig. 8: *III a*). Här blev den utomnormala bilden (*b*) mycket skarp, ytterligare hoptryckt i vertikal led som den blev, med otydliga konturer endast i bägge ändarna. Normalbilden (*c*) blev däremot till ytterlighet diffus. Till sist klippte jag ut en liknande öppning men med vertikal längdutsträckning (fig. 8: *IV a*). Nu blev den utomnormala bilden (*b*) diffus, men normalbilden (*c*) mycket skarp. *Allt detta beroende på, om de kaustikor, som alstras av de olika föremålspunkterna, till större delen komma att falla på varandra eller bredvid varandra.*

V. Observationer med kikare.

Objektivet på den använda kikaren, en s. k. astronomisk tub, hade en öppning på 2,5 cm. Försöksanordningarna voro ungefär desamma som i föregående kapitel nämnda. Som första »föremål» använde jag en liten ljusöppning bestående av ett litet cirkelrunt hål på c:a 1 mm diameter. Betraktade jag detta genom kikaren placerad på c:a 65 à 100 cm avstånd från ljusöppningen, kunde jag efter behag ställa in okularet, så att normalbilden eller den utomnormala bilden syntes i densamma. Det blev den bekanta vertikala resp. horisontella pilen. Deras utseende i kikaren överensstämde med det, som kom till synes vid objektiv framställning på en pappskärm, för vilket är redogjort i föregående kapitel. Ökades avståndet mellan kikaren och ljuspunkten, blev ju vinkeln mindre mellan de yttersta

strålarna i det ljusknippe, som tränger in i kikaren. Detta har till följd, att längdutsträckningen minskar på såväl normalbilden som den utomnormala, så att skillnaden dem emellan i utseende blir mindre markerad. För större avstånd mellan föremål och kikare spelar det heller icke så stor roll, att den utomnormala bilden ligger något närmare kikaren än normalbilden, utan man kan se båda på en gång i kikaren. Den ljusstarkare och skarpare kommer då att dominera. Vilkendera detta blir beror på föremålets form. Har föremålet en smal och långsträckt form med längdutsträckningen i vertikal led, så dominerar normalbilden, emedan varje särskild ljuspunkts kaustika då faller *inom* bilden. Endast över- och underkant bli då oskarpa, när man inställer kikaren på denna bild. Går däremot föremålets längdutsträckning i horisontell led, dominerar den utomnormala bilden av liknande skäl. Lätt visas detta genom att i zinkplåten klippa ut ett kors bestående av en vertikal och en horisontell skåra. Den vertikala skåran framträder då bäst, när kikaren är inställd på normalbilden och den horisontella, när den är inställd på den utomnormala. Men ju större kikarens avstånd är från föremålet desto mindre framträder skillnaden mellan de båda bilderna.

VI. Sammanfattning.

Som resultat av föregående undersökningar kan man fastslå, att det i de allra flesta fall vid iakttagelser av föremål i vatten med blotta ögat är den bild, som här benämnts *normalbilden*, som framträder. Så är nämligen förhållandet:

a. dels alltid vid seende med endast *ett* öga,

b. oftast vid seende med båda ögonen, nämligen:

1. alltid, när de strålar som träffa de båda ögonen ha lämnat vattenytan under samma brytningsvinkel, vilket är fallet när man håller huvudet i vanligt läge,

2. oftast även, när de strålar som träffa de båda ögonen ha lämnat vattenytan under olika brytningsvinkel.

I det sist nämnda fallet är det endast, när de utomnormala bilder, som skulle framträda för vardera ögat särskilt, äro ungefär lika långa och lika skarpa (vilket inträffar i omgivningen för deras minimilängd), som den utomnormala bilden dominerar.

På en skärm kan man efter gottfinnande projicera båda bilderna, sedan man låtit de från föremålet utgående och i vattenytan brutna strålarna brytas samman av en samlingslins; vilkendera bilden, som blir skarpast, beror på föremålets form, jämfört med riktningen av de kaustikor, som uppträda vid de båda bilderna.

En kikare kan inställas på vilken som helst av bilderna.

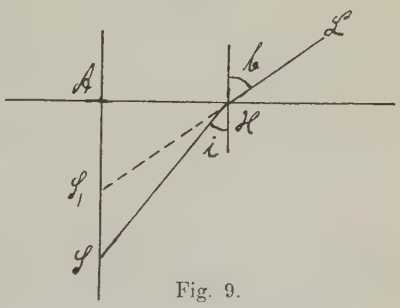


Fig. 9.

Den *normalbild* S_1, som alstras av från föremålspunkten *S* i riktningen *SH* (se fig. 9) utgående strålar, faller i den punkt, där den brutna strålen *HL*:s förlängning bakåt skär normalen *SA*. Strålens skenbara väg S_1H i vattnet är därvid $^3/_4$ av den vägsträcka *SH*, som den verkligen passerat, vilket man lätt kan visa med sinussatsen tillsammans med Snellius brytningslag.

Några försök till läran om växelströmmar och elektriska svängningar.[1]

Av ERIK LÖWENHAMN

Växelströmsläran har i skolor med tillgång till enbart likström ofta blivit ett abstrakt kapitel. Det är därför ett viktigt önskemål att få alla fysiska institutioner vid högre skolor utrustade med lämpliga omformare för att kunna göra eleverna förtrogna med användningen av växelströmmar. Sådana omformare passande för skolbruk finnas ju också tillgängliga i handeln, men deras jämförelsevis höga pris gör, att det väl ännu kommer att dröja rätt länge innan de kunnat anskaffas överallt.

Det är i alla händelser önskvärt att med de medel, som vid varje skola stå till buds, kunna visa de mest karakteristiska egenskaperna hos växelströmmar, nämligen att de kunna passera en kondensator, att en ledare med självinduktion gör större motstånd mot dem än mot likström, och att de lätt kunna transformeras.

Dessa grundläggande fakta gå mycket väl att visa, utan att man har teknisk växelström till sitt förfogande, och demonstreras väl också i regel. Det är därför inga nyheter, som författaren har att komma med, men en sammanställning av några försök, som med enkla medel illustrera växelströmmarnas egenart och samtidigt anknyta till de elektriska svängningarna, kan ju ändå ha sitt intresse.

För att visa, att växelström kan gå fram genom en ledning, som genom en kondensator är spärrad för likström, kan man begagna sig av en glimljuslampa[2], kopplad

[1] Ur ett föredrag för lärarekandidater v.t. 1926.

[2] Angående glimlampans egenskaper se denna tidskrift årg. 6, sid. 13 och 100.

enligt figur 1. Glimljuslampan *G* kopplas till 220-voltsledningen (110 volt är otillräckligt för de i handeln förekommande typerna) i serie med en strömvändare *S* och en kondensator *K*, bestående av en eller flera telefonkondensatorer om sammanlagt några mikrofarad. En 220-volts lampa kan med fördel användas som säkerhetsmotstånd i tilledningen, om strömvändaren skulle vara osäker, vilket dessvärre icke är så ovanligt.

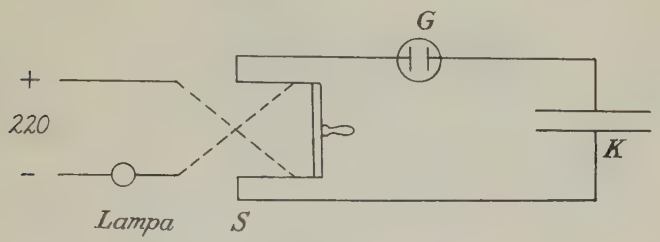


Fig. 1.

Då vippan på strömvändaren tryckes ned åt ena hållet, lyser glimljuslampan ett ögonblick på grund av laddningsströmmen till kondensatorn men slocknar, så snart denna blivit uppladdad. (Genom läckage i kondensatorn kan potentialdifferensen mellan beläggen sjunka så långt, att lampan efter någon minut flammar till på nytt på grund av ny laddningsström.) Omkastas vippan på strömvändaren, få kondensatorns belägg ny uppladdning med motsatt tecken genom lampan, som då lyser till på nytt, men nu med glimljuset kring den andra elektroden.

Kastas strömriktningen om så fort man kan manövrera strömvändaren, får man en tät serie av blinkar i lampan, och det erbjuder ingen svårighet att förstå, att en växelström om t. ex. 50 perioder skenbart skulle hålla lampan kontinuerligt lysande. Ökas kondensatorns kapacitet, blir ljuset starkare. Alltså växer strömstyrkan med periodtal och kapacitet. Därigenom är ju formeln för en kondensators motstånd mot växelström, $R_c = k \frac{1}{C n}$ eller $R_c = \frac{1}{C \omega}$ visserligen icke bevisad, men plausibel.

En enkel växelströmsgenerator av induktorietyp kan sammansättas av en elektrolytisk strömbrytare och två spolar enligt figur 2. En större Simonströmbrytare[1] med porslinsrör är särskilt lämplig på grund av den stora strömstyrka, den tål, men bör, då den arbetar allt annat än ljudlöst, placeras i ett annat rum. En dubbelledare av 1 à 1,5 mm^2 från arbetsbordet till laboratoriet gör här som i många andra fall mycket stor nytta.

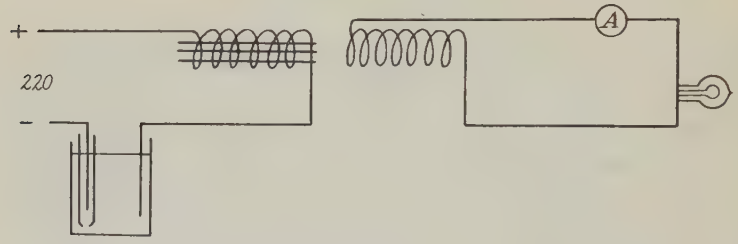


Fig. 2.

Simonströmbrytaren kopplas till 220-voltsledningen i serie med en knivströmbrytare på arbetsbordet, ett reglerbart motstånd om några få ohm men för en strömstyrka av c:a 10 amp. och en primärspole[2] av grov tråd och försedd med kärna av järntrådar. Sådana spolar med uttag för 3, 5 och 8 trådlager finnas i handeln och äro användbara för många försök. Effektiva strömstyrkan bör i denna primärkrets uppgå till 5 à 10 amp.

Till sekundärspole tages en likadan spole eller en elektromagnetspole med flera varv. För att förhindra överraskningar bör man först kontrollera, att denna är lindad på trä eller papp och icke på mässingsrör, vilket ibland förekommer.

Om sekundärspolens ändar förbindas med en lampa för 4 à 10 volt (helst en strålkastarlampa för c:a 1 amp.) och spolen närmas till primärspolens järnkärna, börjar lampan lysa och brinner lätt av, om spolen kommer för nära. En telefonkondensator på 1 à 2 μF, som införes i kretsen,

[1] LEMOINE, Experimentell fysikundervisning, sid. 184.

[2] Tråddiameter 2 mm, c:a 60 varv pr lager. Finnes hos Rudolph Grave, Sthlm.

försvagar icke ljuset från lampan, utan kan i stället öka strömstyrkan högst väsentligt. Därigenom har slutsatsen ur föregående försök, att en växelström kan passera en kondensator, prövats på en växelström av högt period tal.

Verkan av ohmskt motstånd på strömstyrkan visas genom att ett induktionsfritt motstånd införes i strömkretsen. Den inducerade spänningen är hög, exempelvis blev den 140 volt vid ett försök med primärt c:a 500 varv och 8 amp. och sekundärt en spole från Lemoines magnet. Därför är ett gittermotstånd på 50 à 100 ohm erforderligt, om lampans ljusstyrka skall ändras i någon högre grad. Från ett sådant motstånd kan också godtycklig lägre växelspänning shuntas ut på samma sätt som vid likström. Den höga spänningen kan påvisas med glimlampa, om varmtrådsvoltmeter saknas.

Med denna anordning (fig. 2) kan man även visa växelströmsmotståndet hos en spole. Om en elektromagnet med några ohms motstånd i lindningarna införes i sekundärkretsen, slocknar lampan, under det att ett lika stort induktionsfritt motstånd (gitter[1]) icke har någon märkbar inverkan på ljusstyrkan.

Själva sekundärspolens induktans gör sig för övrigt starkt gällande. I det nämnda exemplet med 140 volts spänning blev strömstyrkan i sekundärkretsen endast c:a 1 amp. fastän strömkretsens ohmska motstånd blott var c:a 8 ohm, och man således kunde ha väntat sig en ström på mer än 15 amp.

Inverkan av självinduktionen på strömstyrkan framgår också av en mätning av den tid, som strömmen i en större elektromagnet (med ankare) behöver för att nå sitt maximivärde vid likström. Den uppgår vanligen till 5 à 10 sekunder. Om då spänningen ändrar tecken efter bråkdelen av en sekund, hinner icke strömmen uppnå den styrka, som svarar mot det ohmska motståndet; och den blir allt svagare, då periodtalet växer eller självinduktionen ökas.

[1] Lemoine, sid. 132.

Eller illustrerat med formel som förut: $R_L = L\omega$, växelströmsmotståndet hos en ledare växer med självinduktionen och periodtalet.

Möjligheten att transformera växelströmmen kan visas med två lösa spolar av olika varvtal eller ett mindre induktorium med frånkopplad kondensator och hammare

Om man, som här gjorts, avstår från fordran på exakthet, kan man här direkt anknyta till de elektriska svängningarna. I det föregående har visats, att växelströmmens styrka är beroende av ohmskt motstånd, reaktans och induktans eller av R, R_C och R_L.

Införas värdena på R_C och R_L, är man färdig att acceptera »Ohms lag för växelström»:

$$I = \frac{V}{\sqrt{R + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}},$$

för en krets med ohmskt motstånd, kapacitet och självinduktion i serie. Minustecknet under rotmärket erbjuder dock vissa svårigheter, om man icke infört begreppet fasförskjutning.

Men formeln kan prövas. Den säger, att då $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, skall strömstyrkan nå ett maximum. Detta ger

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \text{ eller } (2\pi n)^2 = \frac{1}{LC}$$

om frekvensen n införes. Omformat blir detta

$$\frac{1}{n} = 2\pi \sqrt{LC} \text{ eller } T = 2\pi \sqrt{LC},$$

där T är tiden för en period.

Om en konstant spänning anlägges mellan + och — i fig. 3 och ljusbågen B tändes, kommer C att uppladdas på den av formeln angivna tiden, emedan motståndet då är minst. Spolen L har därvid upplagrat energi i ett magnetfält, och då detta försvinner, går extraströmmen i samma riktning som huvudströmmen, så att spänningen i C blir högre än mellan kolen i ljusbågen. Denna spänning ut-

jämnas genom en ström i motsatt riktning genom ljusbågen, allt fortfarande på den tid, som formeln fordrar. Urladdningen går för långt av samma skäl som nyss, och samma förlopp upprepas ånyo. Följden blir, att i kretsen *ABLC* uppkommer en växelström, vars period bestämmes av formeln $T = 2\pi\sqrt{LC}$. Då växelströmmen än går i samma riktning som likströmmen i ljusbågen och än i motsatt, blir resultatet en växelströmsljusbåge, emedan växelströmmen i regel blir starkare än likströmmen.[1] Om L och C väljas så, att periodtalet kommer under 20 000, bli pulsationerna i ljusbågen hörbara, och förändringarna i svängningstal kunna uppfattas av örat.

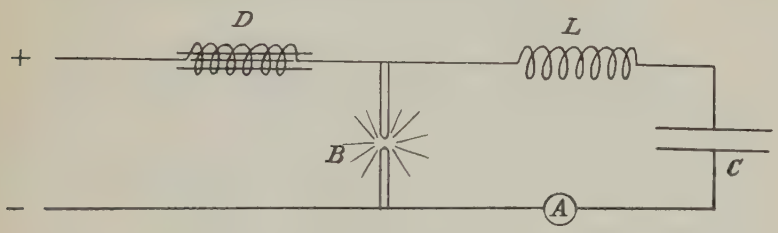


Fig. 3.

Till försöket användes en båglampa med handreglering och oimpregnerade kol. Spolen L måste vara av grov tråd. Den förut omtalade spolen med 8 trådlager är särskilt lämplig på grund av sina olika uttag, men även spolar från en större elektromagnet kunna användas. Är tråden i dessa för fin, kopplas två stycken parallellt. Kondensatorn C utgöres av några telefonkondensatorer på 1 à 2 μF, tillsammans omkring 10 μF. En växelströmsampèremeter A, bäst varmtrådsinstrument, inkopplas, om man vill avläsa strömstyrkan. För att hindra växelströmmen att komma ut på ledningsnätet bör man placera en drosselspole (elektromagnet med ankare) vid D.

Ampèremetern kan ersättas med en lågohmig billampa, tålande några ampère. Denna har fördelen att vara billigare

[1] En god framställning av de i själva verket rätt komplicerade förhållandena i den sjungande ljusbågen finnes i de senare upplagorna av GRIMSEHL, *Lehrbuch der Physik.*

att bränna av än varmtrådsinstrumentet. Risken är rätt stor, då man knappt kan uppskatta strömstyrkan på förhand.

Om ljusbågen får brinna vid en strömstyrka på c:a 2 amp., blir avståndet mellan kolen 1 à 2 mm. Ljusbågens ton brukar vara mycket intensiv.

Minskas kapaciteten *C*, stiger tonhöjden, och samma verkan har en urkoppling av några lager av spolen *L*.

Ampèremetern *A* visar vanligen större strömstyrka än en ampèremeter i likströmsledningen, vilket kan ge anledning att gå in på den wattlösa strömmen.

Om *L* och *C* successivt minskas, blir tonen allt högre och försvinner slutligen. Trots detta kan *A* visa, att ström går fram; övre hörselgränsen har passerats. Införes en järnkärna i *L* vid normalt tonande ljusbåge, så sjunker tonen på grund av den ökade självinduktionen. Variationen i svängningstid kan också göras synlig, om man projicerar ljusbågen på en skärm via en spegel, som roterar med konstant hastighet (driven med elektrisk motor).

Den högfrekventa växelströmmen genom den sjungande ljusbågen kan användas till flera försök. En strumpsticka, som införes i *L*, blir snart het på grund av ommagnetiseringsarbetet. Om som självinduktion användes den primära lindningen på ett medelstort induktorium, som då måste vara mycket grov, ger induktoriet långa gnistor i takt med primärströmmens växlingar. Därigenom flerdubblas ljudstyrkan hos ljusbågen.

Övergången till de ännu hastigare svängningar, som uppkomma, om *L* och *C* tagas små och ljusbågen utbytes mot en gniststräcka, matad av ett induktorium, ger sig sedan själv. Och upptransformeringen av denna växelström i Teslatransformatorn erbjuder stor likhet med den beskrivna användningen av ett induktorium i den sjungande ljusbågens svängningskrets.

Ovanstående försök att illustrera läran om växelströmmar och elektriska svängningar genom experiment och formler, som icke bevisats, är naturligtvis mycket litet tilltalande

för den, som vill vara exakt. Den starkt schematiserade framställningen är i synnerhet vad beträffar den sjungande ljusbågen minst sagt ofullständig. Men den begränsade tid, som i skolan står till förfogande, gör det svårt, för att icke säga omöjligt, att på ett verkligt tillfredsställande sätt behandla hithörande fenomen.

Författaren har därför ett par gånger begagnat sig av bl. a. de beskrivna experimenten för att göra det numera så aktuella kapitlet om elektriska svängningar något mera konkret, än vad som skulle blivit fallet, om samma tid ägnats åt mera exakta metoder.

Spegling mot rörlig planspegel.

Av C. A. LEVIN.

Den inom den klassiska fysiken gällande speglingslagen, då en ljusstråle reflekteras mot en rörlig spegel, kan skrivas under formen

$$\frac{\sin \alpha}{1+\frac{v}{c}\cos \alpha} = \frac{\sin \beta}{1-\frac{v}{c}\cos \beta},$$

då α och β äro infalls- resp. reflexionsvinkel, v spegelns hastighet vinkelrätt mot sig själv mot ljuskällan och c ljushastigheten.

Härledningen av denna formel kan göras på flera olika sätt; följande härledning ger samtidigt en särdeles enkel geometrisk bild av hela speglingsförloppet.

L är en ljuskälla; RS en plan spegel, som rör sig med hastigheten v vinkelrätt mot sig själv mot ljuskällan. I det ögonblick, då spegeln befinner sig i läget RS, utgår från L en ljusglimt i ett divergerande strålknippe mot spegeln.

Var befinna sig spegelns olika punkter i det ögonblick då de träffas av denna ljusglimt? En av ljusknippets strålar träffar spegeln i punkten P; om PQ är normalen mot spegeln genom P, erhålles

$$\frac{PL}{c} = \frac{PQ}{v},$$

varav synes, att orten för P är en hyperbelgren med L till fokus och RS till styrlinje.

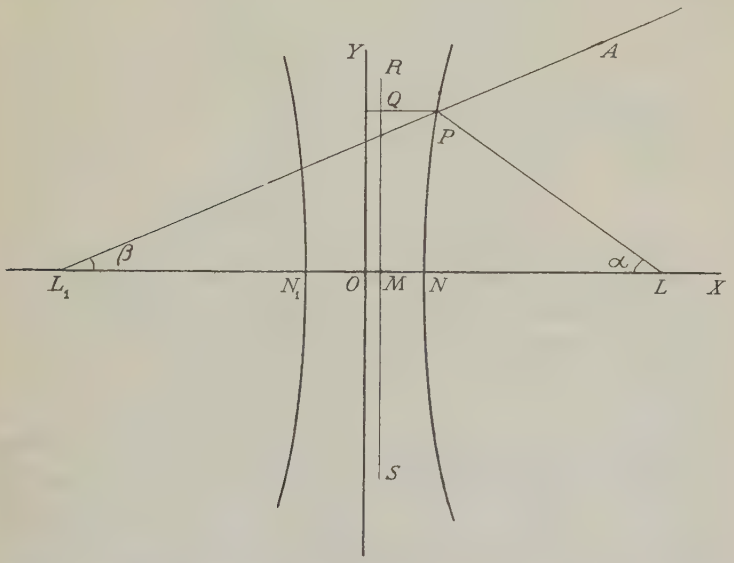
Hyperbelens ekvation med x-axeln längs spegelns normal ML och MR till y-axel blir, om $ML = l$,

$$\left(x + \frac{v^2 l}{c^2 - v^2}\right)^2 - \frac{v^2 y^2}{c^2 - v^2} = \frac{v^2 c^2 l^2}{(c^2 - v^2)^2},$$

eller, om y-axeln flyttas till symmetriaxeln genom hyperbelns medelpunkt,

$$\frac{x^2}{\frac{v^2c^2l^2}{(c^2-v^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{c^2l^2}{c^2-v^2}} = 1.$$

Hela reella axeln är således $\frac{2cvl}{c^2-v^2}$, och skillnaden mellan brännpunkternas avstånd från spegeln (RS) är $\frac{2v^2l}{c^2-v^2}$.



Varje stråle från L undergår reflexion i en punkt på hyperbeln. Speglingslagen erhålles omedelbart genom att tillämpa satsen, att en från L utgående stråle efter reflexionen i en punkt på hyperbeln går till en godtycklig punkt A på minimitid; härav följer, att speglingen försiggår efter den vanliga speglingslagen mot hyperbeln som stillastående spegel. Efter reflexionen går således strålen LP, som om den komme från hyperbelns andra brännpunkt L_1.

Den verkliga spegeln i reflexionsögonblicket i punkten P är parallell med y-axeln.

$\angle PLL_1$ är således infallsvinkel $= \alpha$,
$\angle PL_1L$ är reflexionsvinkel $= \beta$.

För dessa vinklar gälla likheterna

$$PL \sin \alpha - PL_1 \sin \beta = 0,$$

$$PL \cos \alpha + PL_1 \cos \beta = \frac{2c^2 l}{c^2 - v^2},$$

varjämte $$PL - PL_1 = -\frac{2c^2 l}{c^2 - v^2} \frac{v}{c};$$

varav

$$\begin{vmatrix} \sin \alpha, & -\sin \beta, & 0 \\ \cos \alpha, & \cos \beta, & 1 \\ 1, & -1, & -\frac{v}{c} \end{vmatrix} = 0,$$

som ger speglingslagen

$$\frac{\sin \alpha}{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha} = \frac{\sin \beta}{1 - \frac{v}{c} \cos \beta}.$$

Eftersom skillnaden mellan brännpunktsradierna är konstant, följer, att om ljuskällan L ersättes med bildpunkten L_1, varje stråle får sin väg förlängd med sträckan $\frac{2vc}{c^2 - v^2} l$, som ljuset genomlöper på tiden $\frac{2vl}{c^2 - v^2}$.

Hela det från L utgående strålknippet av en ljusglimt ligger således efter reflexionen så, som om det utgått från bildpunkten L_1 tiden $\frac{2vl}{c^2 - v^2}$ tidigare, än det verkligen utgick från ljuskällan L; och bildpunkten L_1 ligger längden $\frac{2v^2 l}{c^2 - v^2}$ längre från spegeln än ljuskällan L.

Om spegeln avlägsnar sig från ljuskällan, ändrar v tecken i speglingslagen; reflexionen sker mot den andra hyperbelgrenen, och strålknippet från L ligger efter reflexionen så, som om det utgått från L_1 tiden $\frac{2vl}{c^2 - v^2}$ senare, än det verkligen utgick från L.

Apparat för demonstration av de s. k. tum- och lillfingerreglerna.

Av ERNST FOGHAMMAR.

Det är ju en mycket enkel sak att uppmontera en elektrisk strömbana så, att en magnetnål invid densamma gör utslag i enlighet med Ampères regel. I sin lärobok visar S. E. Ohlon, hur man även lätt får fram rörelse hos strömbanan, då den representeras av en rak rund koppartråd, som får rulla fram och tillbaka i det magnetiska fältet.

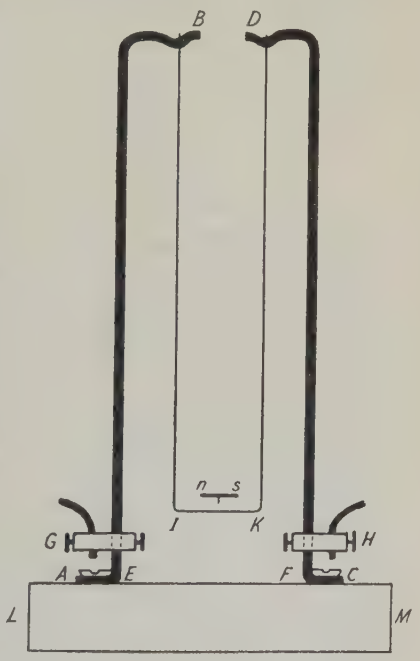


Fig. 1.

En apparat, som samtidigt användes för att visa strömmens inverkan på en magnetnål och magnetfältets återverkan på strömbanan, kan även mycket lätt förfärdigas (fig. 1). *AB* och *CD* äro två c:a 4 dm långa och 3 mm tjocka koppartrådar, som vid *E* och *F* äro böjda i rät vinkel med de fria ändarna formade till små cirklar, genom vilka kraftiga träskruvar fästa trådarna vid den 2 dm långa träplattan *LM*. En klämskruv föres över koppartråden och fastsättes vid *G* och *H* respektive. Övre delen av trådarna böjes, som figuren visar. En gunga

BIKD, av högst 0,5 mm tjock koppartråd upphänges i öglorna vid *B* och *D*.

Om nu en ström ledes genom apparaten i riktningen *IK*, gör nålen *ns* utslag med nordänden *framåt* i enlighet med tumregeln. Har man endast en liten kompassnål, kan denna lämpligen placeras på en pall, vilken kan göras av ett lagom långt rektangulärt pappstycke, som vikes på två ställen. Håller man därefter en nordände från en kraftig stavmagnet, där nålen nyss var placerad, gör strömbanan utslag *inåt*. Redan en strömstyrka av ett par ampère giver åt gungan ett utslag av omkring 5 cm.

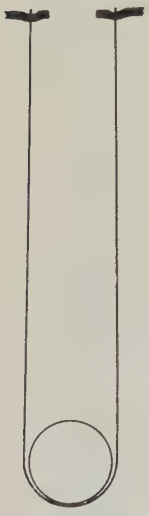


Fig. 2.

Av försökets första del får man tumregeln: »Om man håller högra handen så, att strömmen synes komma in vid handloven och gå ut vid fingerspetsarna, med insidan vänd mot en magnets nordände, gör denna, då den är rörlig, utslag i tummens riktning.» När nordänden däremot är fast, åstadkommer den mellan denna och strömbanan verkande spännkraften i stället en rörelse hos gungan, som sker i *lillfingrets* riktning. »Om man håller högra handen med fingrarna i strömmens riktning och med handens insida vänd så, att den träffas vinkelrätt av de magnetiska kraftlinjerna, så avviker strömbanan åt lillfingrets håll.» Man får ju här mycket tydligt fram *lagen om verkan och motverkan.*

Apparaten kan med fördel användas vid många av de försök, för vilka Ampères stativ är avsett, och, om gungan utbytes mot en spole (fig. 2), för att visa attraktion och repulsion mellan strömspolar samt mellan dylika och magneter. För att visa attraktionen och repulsionen mellan parallella strömmar bör man göra en särskild modell med *IK* avsevärt förlängd.

Högre Latinläroverket i Göteborg d. $^{9}/_{6}$ 1926.

Om Avogadros princip och dess införande på skolstadiet.

Av G. STARCK.

Det är ingen överdrift att beteckna införandet av Avogadros princip som en av de svåraste, kanske den svåraste uppgiften, som möter vid kemiundervisningen på gymnasiet. I följande uppsats, som är ett sammandrag av ett föredrag för lärarekandidater, har förf. dels redogjort för teoriens historia, dels sökt giva en vägledning för ett lättfattligt införande därav på skolstadiet.

1. Historik.

Vid återkomsten från sin stora amerikanska resa besökte Alexander von Humboldt 1804 den franske kemisten Berthollet i Arcueil och sammanträffade där med fysikern Gay-Lussac, som, då endast 25 år gammal, redan hade fäst uppmärksamhet vid sitt namn genom sina arbeten över gasernas utvidgning vid uppvärmning. Humboldt, som var intresserad av gasanalyser och arbetat med eudiometern, föreslog ett samarbete i avsikt att bestämma volymsproportionerna vid knallgasexplosionen. Detta samarbete kom också till stånd, och resultatet blev det berömda och för kemiens utveckling högst betydelsefulla fastställandet av volymsproportionen väte : syre = 2 : 1 (1805).

1808 offentliggjorde Gay-Lussac ensam en undersökning av andra gasreaktioner (t. ex. mellan CO och O_2, NH_3 och HCl, N_2 och $3\,H_2$) och formulerade den efter honom benämnda volymlagen. Några teoretiska spekulationer över orsakerna till denna enkla lag har Gay-Lussac icke givit. Han var framför allt skicklig experimentator.

Året förut hade i England Thomas Thomson offentliggjort grunddragen av Daltons atomteori, och 1808 framträdde Dalton själv med en utförlig redogörelse för sin teori i arbetet »New system of chemical philosophy». Märkvärdigt nog ställde sig Gay-Lussac, vars arbeten utgjorde ett vackert stöd för atomteorien, avgjort skeptisk till densamma, liksom Dalton å sin sida rentav betvivlade riktigheten av Gay-Lussacs resultat.

Den närmast till hands liggande slutsatsen, som på basis av atomteorien kunde dragas ur Gay-Lussacs resultat i fråga om volymsförhållandet väte : syre, satt i samband med viktsproportionen av väte och syre i vatten, är otvivelaktigt den, att lika stora volymer av olika gasformiga grundämnen innehålla lika många atomer, eller som Gay-Lussac uttryckte det: tätheterna av enkla eller sammansatta gaser äro proportionella mot deras empiriskt funna föreningsvikter eller mot multipler av dem. Detta var också den tolkning, som Berzelius gav volymlagen, och han begagnade den som ledning vid fastställandet av atomvikterna. Så ges vattnets formel H_2O av volymsproportionen 2 : 1 och därmed vätets och syrets atomvikter. Kolets atomvikt erhölls ur volymsförhållandet CO : O o. s. v. Detta var Berzelius' teori för volymatomen, enligt vilken en volym av ett gasformigt element också motsvarar en atom. Detta är också riktigt i fråga om de enkla gaserna väte, syre, kväve, halogenerna, men teorien måste falla, då man, huvudsakligen genom Jean Baptiste Dumas' arbeten, gjort bekantskap med gaser, vilkas gastäthet var 2, ja t. o. m. 3 gånger för hög.

Då hade redan för länge sedan Amadeo Avogadro, 1811, i »Essai d'une manière de déterminer les masses relatives des molecules élémentaires des corps et les proportions selon lesquelles elles entrent dans ces combinaisons» framställt sin »princip». Avogadro kallar atomerna »elementära molekyler», grundämnenas molekyler »konstituerande molekyler» och föreningarnas molekyler »integrerande molekyler». Han stöder sig uteslutande på Gay-Lussacs

volymlag och säger, att den enklast förklaras genom antagandet, att lika volymer innehålla lika många integrerande molekyler. Den viktigaste och mest geniala tanken i Avogadros avhandling är den, att grundämnena bilda sammansatta molekyler. Han diskuterar utförligt vattnets volymsammansättning, visar, att syrets konstituerande molekyl måste dela sig i två, och att vattnets integrerande molekyl är sammansatt av en halv molekyl syre och en molekyl eller, vilket är detsamma, två halva molekyler väte. För denna del av principen fanns då intet gehör, och därför drojde det så länge, innan själva grundprincipen blev accepterad. Man ansåg på denna tid, att det endast fanns ett slag av minsta delar hos grundämnena, att hos dem atomer och molekyler äro identiska (så Fourcroy, Thénard m. fl.). Dåtidens åsikter om den kemiska frändskapen medgåvo icke heller, att atomer av samma grundämne skulle kunna förenas.

I två senare avhandlingar, 1814 och 1821, har Avogadro utvecklat sina åsikter och tillämpat dem på de nya rön, som gjorts under tiden. Han publicerade i föga kända tidskrifter, och Berzelius, som läste all litteratur, omnämner ej hans namn och känner ej till hans teori förrän inpå 30-talet. Avogadro var en mycket tillbakadragen natur, som icke heller underhöll några vetenskapliga förbindelser.

1814 publicerade André Marie Ampère en atomteoretisk avhandling i form av ett brev till Berthollet. Ampère kallar atomerna molekyler och molekylerna partiklar. Han utgår liksom Avogadro uteslutande från Gay-Lussacs volymlag, ej från de allmänna gaslagarna, och uttalar samma åsikter som denne. Exempelvis: »gasens partiklar, vare sig enkla eller sammansatta, hava samma avstånd från varandra, m. a. o. deras antal är proportionellt mot volymen». Gaspartiklarna äro delbara: »kvävoxid, som till halva volymen består av syre, till halva volymen av kväve, innehåller partiklar, bildade av föreningen av en halv syrepartikel och en halv kvävepartikel. Vattnets partiklar bestå av en hel vätepartikel och en halv syrepartikel, ammoniak av $^1/_2$

kväve- och $1^1/_2$ vätepartikel». Avogadro ansåg, att elementernas molekyler bestå av 2 atomer, men Ampère antog minst 4. Hans formler blevo därigenom mycket komplicerade, och detta antagande utan grund bidrog till att Ampères uppsats icke blev särskilt beaktad.

Sitt andra inlägg i atomteorien gjorde Ampère 1832 i en uppsats, där för första gången termerna atom och molekyl förekomma klart definierade och i modern betydelse.

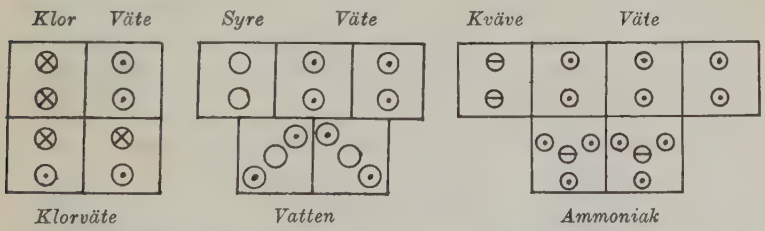
Under tiden 1811—26 finnes i den kemiska litteraturen för övrigt intet omnämnande av eller ens en hänvisning till Avogadro eller Ampère, som gäller atomteorien. Berzelius' ståndpunkt var 1813 den, att grundämnenas atomvikter äro proportionella mot deras spec. vikt i gasform, och han har aldrig bekänt sig till åsikten, att kropparna i gasform innehålla lika många molekyler pr volymsenhet.

1826 utgav Dumas sin viktiga avhandling: »Mémoire sur quelques points de la théorie atomique», vari han som den förste försöker pröva Avogadros sats experimentellt och för detta ändamål utarbetar sin metod för gastäthetsbestämning. För jod fann han därvid samma atomvikt som tidigare Gay-Lussac på grund av jodvätets gastäthet, för kvicksilver däremot endast hälften av Berzelius' atomvikt. I nya uppsatser 1832 sattes Hg = 100 och kvicksilveroxidens formel = Hg_2O. För fosforånga fann han gastätheten 4,35 (luft = 1) eller dubbelt så stor som den 1826 ur fosforvätets och fosfortrikloridens gastätheter beräknade. »Atomvikten för fosfor måste fördubblas och fosforvätets analogi med ammoniak uppgivas.» Svavelångan beredde en stor överraskning, dess gastäthet var 3 gånger för stor (6,6 i stället för 2,2).

Som en följd av Dumas' försök uppgav Berzelius sin åsikt, att lika volymer av grundämnena innehålla lika många atomer (1833).

1833 framträdde på den atomteoretiska scenen Marc Antoine Gaudin. Denne föga kände, men ganska märklige man levde 1804—80, var lärjunge till Ampère, 1835—64 räknare vid Bureau des longitudes och under ett i ekono-

miskt hänseende mycket bekymmersamt liv ständigt sysselsatt med vetenskapliga studier, som framför allt gällde atomgruppering i kemiska föreningar. Han framställde 1837 syntetiska rubiner ur ammoniakalun med knallgasbläster; 1839 visade han, att kvarts kan smältas och bearbetas som glas. Hans märkliga molekylar- och atomteoretiska avhandling har titeln: »Nouvelle manière d'envisager les corps gazeux, avec son application à la détermination du poids relatif des atomes.» Det väsentligt nya i Gaudins avhandling är, att han ur Dumas' resultat drager den riktiga slutsatsen, att om de vanliga, elementära gasernas molekyler innehålla 2 atomer, så innehåller kvicksilvermolekylen 1 atom, fosformolekylen 4 och svavelmolekylen 6 atomer. Han inför beteckningarna 1-, 2-, 3-atomiga för gasmolekyler och uppställer slutligen, med användning av Daltons elementsymboler, följande schemata för bildningen av klorväte, vattenånga och ammoniak:



I dessa tre teckningar sammanfattas Daltons atomteori, Gay-Lussacs volymlag och Avogadros princip. De äro också tydligen förebilden till läroböckernas likartade teckningar, som avse att göra Avogadros princip mera åskådlig.

Berzelius refererade Gaudins avhandling med ett visst gillande men tog också avstånd därifrån på ett par punkter. Icke heller detta arbete, som i fråga om atomteoretisk ståndpunkt knappast distanseras av läroböckerna i kemi från 1900-talets ingång, hade något större inflytande på kemiens utveckling; dock har exempelvis Cannizzaro tagit djupa intryck därav.

Under 1830-talet kommo gastäthetsbestämningar mer

och mer i bruk, men endast för att kontrollera analyserna av organiska substanser, ej för fastställandet av formler. Uppfattningen i tongivande kretsar framgår av att Gmelin i sin stora handbok (1843) icke känner till, att ett element kan innehålla smådelar av två slag, att Berzelius i den 5:e upplagan av sin tyska lärobok diskuterar frågan, om elementen bestå av atomgrupper, men anser enstaka atomer sannolikare, att slutligen H. Kopp i sin stora Geschichte der Chemie (1843—47) icke nämner vare sig Avogadros eller Ampères namn. I början av 1840-talet var således för alla kemister, utom Avogadro och Gaudin, den tanken fullständigt främmande, att lika gasvolymer innehålla lika många molekyler.

Då inledde, 1842, Gerhardt en ny epok i den Avogadroska teoriens historia, genom att framhålla, att man genom lämpligt val av atomvikter skulle kunna förenkla de kemiska formlerna. 1843 föreslog han i »Considérations sur les équivalents de quelques corps simples et composés» atomvikter sådana, att formlerna bliva exempelvis HCl, H_2O, NH_3, CO_2, KCl, KHO, SO_4H_2 (Berzelius har ~~HCl~~, ~~HO~~, K_2~~Cl~~, $K_2O \cdot$ ~~HO~~, $SO_3 \cdot$ ~~HO~~; Gmelin HCl, HO, NH_3, CO_2, KCl, $KO \cdot HO$, $SO_3 \cdot HO$). Till Gerhardt anslöt sig Laurent, från vilken de första molekylarformlerna för de enkla gasreaktionerna stamma:

$$(HH) + (ClCl) = (HCl) + (HCl),$$
$$(HH) + (HH) + (OO) = (HH)O + (HH)O.$$

Viktig för atomteorien var en undersökning av Favre, och Silberman (1846), vari visades, att mera värme utvecklas, då kol brinner i kvävoxidul, än då det brinner i syre. Orsaken angavs av dem vara, att i syrgasen atomerna måste åtskiljas, innan förbränningen kommer till stånd, och att härtill mera värme förbrukas än för spjälkningen av kvävoxidul.

På 1850-talet började Gerhardts och Laurents åsikter alltmer omfattas, men Avogadros princip hade ännu ett hinder att övervinna: de anomala gastätheterna (t. ex. av salmiak och svavelsyra). De förklarades av Laurent bero

på ett sönderfallande av molekylen, en på den tiden alltför djärv tanke.

1857 bildar en vändpunkt i teoriens historia; den kinetiska gasteorien, genomförd av CLAUSIUS, ger den Avogadroska principen en fysikalisk grundval. Ur den kinetiska gasteoriens förutsättningar kan principen bevisas. Samma år inför H. SAINTE CLAIRE-DEVILLE begreppet molekylernas termiska dissociation till förklaring av de anomala gastätheterna. Flera andra forskare yttra sig i samma riktning (Cannizzaro, Kopp, KEKULÉ, v. PEBAL, vilken sistnämnde lämnat ett enkelt experimentellt bevis för salmiakens dissociation).

1858 förklarar Cannizzaro, att intet bekant faktum står i strid med Avogadros princip, och framhåller för övrigt sin landsman som dess upphovsman. Vätgasens formel skrives av Cannizzaro = H_2, svavelgasens = S_6 till S_2, ozonets = O_3, kvicksilvergasens = Hg. Och slutligen kan teoriens genombrott dateras 1860, då vid en kemistkongress i Karlsruhe Cannizzaro höll ett föredrag, som kraftigt befordrade teoriens allmänna antagande.

2. Avogadros princip i skolan.

När och för vilket ändamål skall man införa Avogadros princip vid skolundervisningen? Härpå kunde man svara: första gången man möter en kemisk förening, i vars formel alla koefficienter hava en gemensam heltalsdivisor (t. ex. H_2O_2). Annorlunda uttryckt: när det blir nödvändigt att framhålla, att den enklaste formel, som sammansättningen ger, ej är den enda möjliga, utan att flera formler motsvara en viss sammansättning. Eller slutligen för att besvara den vid införandet av det kemiska formelsystemet endast kringgångna frågan om det rätta valet av atomvikter.

Till utgångspunkt, för att ej alltför oförmedlat komma in på gasreaktioner, låt oss taga vätesuperoxid. Vi ställas här inför frågan: är dess formel HO eller H_2O_2? I sam-

band därmed framställer sig osökt frågan: vilka skäl har man att skriva vattnets formel H_2O? Sammanfattade bli våra frågor i följande schema:

vatten .....H_2O^{16} eller HO^8
vätesuperoxid HO^{16}, $H_2O_2^{16}$ » HO_2^8.

Detta ger oss anledning att studera vattenbildningen närmare. Viktsammansättningen är bekant; elektrolysen gav, att 2 l vätgas förena sig med 1 l syrgas. Frågar man, hur stor volym vatten härvid bildas, blir svaret oföränderligt: 3 l. En enkel beräkning visar, att det i själva verket endast bildas 1,45 cm^3. Vi hava då jämfört med varandra volymerna av gas och vätska, frågan bör gälla volymen av bildad vattenånga. Härmed hava vi motiverat försöket att explodera knallgas vid 100°.

Vad detta försöks utförande beträffar, har förf. prövat en hel del av de apparater, som konstruerats därför, och stannat vid den av Moll i hans lärobok för gymnasiet angivna såsom på en gång enkel och absolut tillförlitlig. Den medger visserligen utförandet av endast ett försök under en timme, medan den av N. Löfman i Pedagogisk tidskrift år 1917 beskrivna tillåter flera bestämningar under en lektion, men då man knappast behöver befara ett misslyckande, spelar detta ingen större roll. Medan detta försök är jämförelsevis enkelt, väntar klorknallgasexplosionen, som är mycket otrevlig, fortfarande på sin reformator.

Vi äro därmed framme vid Gay-Lussacs volymlag. Och därpå heter det i allmänhet ordagrant: för att förklara denna lagbundenhet antog Avogadro (1811) o. s. v. Säkerligen är det i själva verket mycket få elever, som känna behov av någon förklaring. En vacker lagbundenhet har påvisats, men då varken Gay-Lussac själv eller hans efterföljare under 50 år fordrade någon förklaring eller accepterade den givna, kan man knappast vänta, att en skolgosse skall begära en sådan. För att en förklaring här skall vara nödvändig, måste man ställas inför en konflikt,

såsom först en konflikt nödgade vetenskapen att draga fram Avogadros sats ur glömskan.

I stället för att giva en förklaring, vars samband med det förklarade, som historien visat, är så dunkelt, låt oss se till, vilka slutsatser kunna dragas ur lagen. Vi vända oss då först till bildningen av klorväte.

$$\begin{aligned} H \;+\; Cl \;&=\; HCl \\ 1 \text{ vol.} + 1 \text{ vol.} \;&=\; 2 \text{ vol.} \end{aligned}$$

För dessa tre ämnen gäller tydligen satsen, att lika volymer innehålla lika många atomer. Gå vi så till knallgasexplosionen:

$$\begin{aligned} 2\,H \;+\; O \;&=\; H_2O \\ 2 \text{ vol.} + 1 \text{ vol.} \;&=\; 2 \text{ vol.}, \end{aligned}$$

så gäller satsen tydligen det vänstra, men ej det högra ledet, där vi ha 3 atomer. Man skulle vänta sig 3 volymer vattenånga. Om vi taga ännu ett exempel, som för övrigt är lätt att experimentellt verifiera:

$$\begin{aligned} S + 2\,O \;&=\; SO_2 \\ 3 \text{ vol.} \;&=\; 2 \text{ vol.}, \end{aligned}$$

så gäller satsen inte heller här. Den är således i allmänhet oriktig. Men det är anmärkningsvärt, att den gäller för de vänstra leden, medan vi för de högra leden skulle kunna formulera följande sats: av kemiska föreningar intaga de viktsmängder, som anges av formeln, lika stora volymer. Vore det då inte möjligt att formulera en lag, som täcker båda dessa? Den sista kan utsägas så, att lika stora volymer av gasformiga kemiska föreningar innehålla lika många molekyler. Formeln för vattenbildningen visar, att 2 atomer väte intaga samma volym som 1 molekyl vattenånga, 1 molekyl klorväte och 1 molekyl SO_2. Det synes lätt, att den senare satsen kan utsträckas att gälla även för grundämnena, om vi få betrakta 2 atomer väte som en molekyl och på samma sätt i fråga om de andra här förekommande grundämnena. Kalla vi nu i stället

volymen av 36,5 g klorväte för 1 vol. o. s. v., så bliva formlerna

$$(2\ H) + (2\ Cl) = 2\ HCl$$
$$1\ vol. + 1\ vol. = 2\ vol.,$$

som vi hellre skriva

$$H_2 + Cl_2 = 2\ HCl.$$

Det är nu också lätt att visa, att valet av t. ex. atomvikten 8 för syre skulle helt och hållet bryta sönder denna vackra lag. Vi skulle få skriva antingen

$$2\ H_2 + O_4 = 2\ H_2O_2,$$

med 4-atomiga syre- och vattenmolekyler, eller

$$2\ H + O_2 = 2\ HO,$$

med 1-atomiga vätemolekyler.

På detta sätt synes mig införandet av Avogadros princip bliva mindre dogmatiskt, än stundom torde vara fallet. Men liksom Avogadros princip blev allmänt antagen, först sedan den framgått som ett korollarium av den kinetiska gasteorien, så bör dess införande på skolstadiet stödjas av ett under fysiklektionerna levandegjort molekylbegrepp. Jag hänvisar i detta samband till en uppsats av Minnaert i Poskes tidskrift för år 1919 och en av Th. Wulf i samma för år 1921, med intressanta och roande, av förf. med ganska goda resultat upprepade försök att åskådliggöra molekylarrörelsen i en gas.

Angående enhetliga beteckningar i matematik och fysik.

Efter förslag av representanter för vetenskap och teknik utsände Skolöverstyrelsen i mars 1925 nedanstående cirkulär I (sid. 3), som red. ansett sig böra återgiva i tidskriften för att därmed göra det lättare tillgängligt och för att så i sin mån befrämja cirkulärets och dess initiativtagares syftemål, att åstadkomma ett enhetligt beteckningssystem.

I cirkuläret åtföljande skrivelse anbefallas de internationellt fastställda beteckningarna till användning vid undervisningen »i den mån så lämpligen ske kan». Om övriga föreslagna beteckningar heter det, att de »torde åtminstone i vissa fall lämpligen böra komma till användning vid skolundervisningen». Det överlämnas alltså åt vederbörande lärare att själva pröva, vad som här bör ifrågakomma.

Ett påpekande angående en detalj i förslaget må göras. Cirkuläret rekommenderar skrivsättet $7,5°$. Man hade väntat $7°,5$, alltså med gradtecknet ovanför decimalkommat, vilket så långt undert. har sig bekant är gängse bruk bland astronomer, geodeter (Rikets allm. kartverk) och lantmätare (se Kungl. mätningsförordningen av den 17 dec. 1920). I god överensstämmelse härmed användes detta beteckningssätt av de flesta lärare och läroboksförfattare (se för övrigt Skolöverstyrelsens studentuppgifter). När sorttecknet sättes *ovan* raden, placeras det av astronomerna konsekvent på exponentens plats vid den siffra (entalssiffran), vars sort den anger ($11^h35^m27^s,3$), en regel, som bör lända till efterföljd.

Detta skrivsätt medför större tydlighet. Ett gradtecken vid sista decimalen kan i skrift lätt tagas för en nolla och ett minuttecken för en etta eller ett decimalkomma.

Bland strävanden att åstadkomma enhetliga beteckningar och definitioner må i detta sammanhang omnämnas Kungl. Mynt- och justeringsverkets förslag till författningar om »Mått och vikt m. m.» (1918), vilket sedermera delvis fullständigt omredigerats och inlämnats som nytt förslag (1926). Liksom det förra blev föremål för berättigad kritik (bl. a. vid diskussion i fysiska sällskapet i Stockholm) ger det senare anledning till åtskilliga invändningar från fysikaliskt-tekniskt håll, vilka ej torde utebli, när förslaget underkastas vederbörlig granskning.

Nu senast har tidskriften från Ingenjörsvetenskapsakademien mottagit förslag till definitioner på värmeenhet och värmevärden, vilket är resultatet av samarbete mellan representanter för de nordiska ländernas tekniska sammanslutningar. (Cirkulär II, sid. 7.) Red. tillmötesgår gärna Akademiens anhållan om dess publicering i tidskriften men vill betona förslagets karaktär av kompromiss mellan rent vetenskapliga och praktiska krav. Definitionerna ha därför fått en avfattning, som tillfredsställer de senare men ej fullt de förra.

En skolman gör gärna följande reflexioner vid genomläsning av förslaget.

1:o) Uttrycket »från + 14°,5 till + 15°,5 C» är ur undervisningssynpunkt klarare än uttrycket »vid + 15° C» (§ 2).

2:o) Ur tydlighetssynpunkt är benämningen kilogramkalori att föredraga framför enbart kalori, detta i anslutning till de väl motiverade beteckningarna (kcal, gcal, tcal). Dock torde man böra upplysa om att tekniker sätta likhetstecken mellan kalori och kilogramkalori.

3:o) Upplysning bör lämnas om den tekniska termen värmevärde, men man tvekar att rekommendera den till användning vid den elementära undervisningen, särskilt i kombinationen »kalorimetriskt värmevärde», vilken benämning av lärjungarna säkerligen komme att förblandas med specifikt värme. Benämningarna kalorimetriskt och effektivt förbränningsvärme äro att föredraga.

C. E. Blom.

*

I. Skolöverstyrelsens cirkulär.

Beteckningar å storheter, måttenheter etc., som av Kungl. Skolöverstyrelsen förordas till användning i läroböcker och vid undervisning.

A. Av "Commission Electrotechnique Internationale" fastställda beteckningar.

1. Storheter.

Storhetens namn	Beteckning	Beteckning, som rekommenderas i de fall, då huvudbeteckningen icke passar
Längd	l	För angivande av storheters dimensioner böra stora bokstäver L, M, T användas
Massa	m	
Tid	t	
Vinklar	$\alpha, \beta, \gamma \ldots$	
Tyngdkraftens acceleration	g	
Arbete	A	W
Energi	W	U[1]
Effekt	P	
Verkningsgrad	η	
Varvantal per tidsenhet	n	
Temperatur °C	t	θ ϑ
Absolut temperatur	T	Θ
Period	T	
$2\pi/T$	ω	
Frekvens	f	ν
Fasförskjutning	φ	
Elektromotorisk kraft	E	
Strömstyrka	I	
Motstånd	R	
Spec. motstånd	ϱ	
Ledningsförmåga	G	

[1] Denna beteckning användes i termodynamiken.

Storhetens namn	Beteckning	Beteckning, som rekommenderas i de fall, då huvudbeteckningen icke passar
Elektricitetsmängd	Q	
Elektrostatisk induktion	D	
Kapacitet	C	
Dielektricitetskonstant	ε	
Induktans (självinduktion)	L	$\mathfrak{L}$
Ömsesidig induktion	M	$\mathfrak{M}$
Reaktans	X	$\mathfrak{X}$
Impedans	Z	$\mathfrak{Z}$
Reluktans	S	$\mathfrak{R}$
Magnetisk flux	Φ	$\mathfrak{F}$
Magnetisk fluxtäthet (induktion)	B	$\mathfrak{B}$
Magnetisk fältstyrka	H	$\mathfrak{H}$
Magnetiseringsintensitet	J	$\mathfrak{J}$
Permeabilitet	μ	
Susceptibilitet	$\varkappa$	
Elektrisk potentialdifferens	V	U
Magnetomotorisk kraft		$\mathfrak{E}$

Ronde, fetstil eller speciell typ

2. Enheter. Beteckning på enhetens namn.

Beteckningar för elektriska enheter användas endast efter numeriska värden.

Enhetens namn	Beteckning
1. Ampère[1]	A
2. Volt	V
3. Ohm	O eller Ω
4. Coulomb	C
5. Joule	J
6. Watt	W
7. Farad	F
8. Henry	H

[1] Skolöverstyrelsen har här ansett sig böra följa Svenska Akademiens ordlista och frångå kommitténs skrivsätt ampere.

Enhetens namn	Beteckning
9. Volt-coulomb	VC
10. Watt-timme	Wh
11. Volt-ampère	VA
12. Ampère-timme	Ah
13. Milli-ampère	mA
14. Kilowatt	kW
15. Kilovolt-ampère	kVA
16. Kilowatt-timme	kWh

m för milli μ för mikro- eller mikr-
k » kilo M » mega- eller meg-

3. Matematiska beteckningar och regler.

Namn	Beteckning	Beteckning, som rekommenderas i de fall, då huvudbeteckningen icke passar
Total differential	d	*d*
Partiell differential	∂	
Bas till naturliga logaritmer	e	ε
$\sqrt{-1}$	i	j
Förhållandet mellan cirkelns omkrets och diameter	π	
Summa	Σ	
Integral	$\int$	

1. Vanliga siffror som exponenter skola uteslutande användas för att representera potenser (som en konsekvens härav är det önskvärt att uttrycken $\sin^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, som användas i vissa länder, uttryckas med arcsin x, arctang x).
2. Komma eller punkt skall användas för att avskilja decimaler, varvid bruket inom varje land följes; men i tal skiljas grupper av tre siffror genom ökat mellanrum och icke medelst punkt eller komma. (Exempel 1 000 000.)
3. För multiplikation av siffertal och geometriska storheter, betecknade med bokstäver, rekommenderas användandet av tecknet $\times$, varemot en punkt endast får användas, då ingen tvetydighet är möjlig.

4. För att utmärka division i en formel är horisontellt bråkstreck eller kolon att rekommendera. Dock må sned linje användas, om ingen tvetydighet är möjlig; då det är nödigt, användes för tydlighetens skull vanlig parentes ( ), fyrkantig parentes [ ] och klammer { }.

4. Förkortningar för vikt- och måttenheter.[1]

Längd: m; km; dm; cm; mm; μ = 0,001 mm.
Yta: a; ha; m^2; km^2; dm^2; cm^2; mm^2.
Volym: l; hl; dl; cl; ml; m^3; km^3; dm^3; cm^3; mm^3.
Massa: g; t; kg; dg; cg; mg.

B. Andra beteckningar, enligt Aseas handbok n:r 3.

1. Storheter.

Storhetens namn	Beteckning	Storhetens namn	Beteckning
Bredd	b	Vikt	G
Höjd, djup	h	Specifik vikt	γ
Väg	s	Kraftmoment (t. ex.	
Radie	r	vridmoment, böj-	
Diameter	d	moment)	M
Våglängd, längd (i rum-		Tröghetsmoment . .	J
met) av hel svängning	λ	Värmemängd	Q
Yta	A	Specifikt värme . .	c
Volym	V	c för gas vid konstant tryck	c_p
Hastighet i allmänhet	v	c för gas vid konstant	
Acceleration	a	volym	c_v
Kraft	F	Antal lindningsvarv .	N
Specifikt tryck . . .	p	Magnetomotorisk kraft	IN
Friktionskoefficient .	μ		

[1] Så förkortas exempelvis meter till m utan punkt eller annat skiljetecken efter.

2. Måttenheter.

Namn	Beteckning
Grader = nittiondelar av rät vinkel (t. ex. $7{,}5^{\circ}$)	$^{\circ}$
Minuter = sextiondelar av en grad (t. ex. $15{,}4'$)	$'$
Sekunder = sextiondelar av en minut	$''$
Nygrader = hundradelar av rät vinkel (t. ex. $52{,}3^{c}$)	c
Nyminuter = hundradelar av en nygrad	$'$
Nysekunder = hundradelar av en nyminut	$''$
Sekund	s
Minut	m
Timme	h
Temperaturgrad ($^{\circ}$ C = grader Celsius) (t. ex. $18{,}2^{\circ}$)	$^{\circ}$

C. Matematiska beteckningar.

Namn	Beteckning
Naturliga logaritmer	$^{e}\log$
Briggska logaritmer	$^{10}\log$

*

II. Ingenjörsvetenskapsakademiens cirkulär.

Definitioner på värmeenhet och värmevärden.

§ 1.

Såsom enhet för värmemängd skall användas 1 kilogramkalori. Den benämnes i dagligt tal kalori och betecknas kcal.

§ 2.

En kilogramkalori är den värmemängd, som åtgår för att vid 760 mm kvicksilver och 15° C höja temperaturen hos 1 kg vatten 1° C.

Anm. En gramkalori, betecknad gcal, är den värmemängd, som åtgår för att vid 760 mm kvicksilver och 15° C höja temperaturen hos 1 g vatten 1° C.

En tonkalori, betecknad tcal, är den värmemängd, som åtgår för att vid 760 mm kvicksilver och 15° C höja temperaturen hos 1 000 kg vatten (= 1 ton) 1° C.

§ 3.

Kalorimetriskt värmevärde (danska: övre Braendvaerdi, norska: kalorimetrisk braendvaerdi (övre braendvaerdi)) *hos ett fast eller flytande ämne* är den värmemängd i kalorier, som alstras, då 1 kg av ämnet fullständigt förbrinner i sluten kalorimeterbomb av rumstemperatur och härvid det vid förbränningen bildade och det i ämnet eventuellt befintliga vattnet kondenseras till vätska.

Anm. 1. Med rumstemperatur avses en temperatur, som ligger så nära + 20° C, att avvikelsen vid tekniska bestämningar är utan betydelse.

Anm. 2. Gäller uppgift å det kalorimetriska värmevärdet ett annat tillstånd än inlämningstillståndet, skall detta särskilt angivas.

§ 4.

Kalorimetriskt värmevärde (danska: övre Braendvaerdi, norska: kalorimetrisk braendvaerdi (övre braendvaerdi)) *hos ett gasformigt ämne* är den värmemängd i kalorier, som alstras då en gasmängd, som vid 0° C och 760 mm kvicksilver intager 1 m^3 volym, fullständigt förbrinner vid konstant tryck och härvid alla deltagande ämnen såväl före som efter förbränningen hava rumstemperatur samt det vid förbränningen bildade och det i ämnet eventuellt befintliga vattnet kondenseras till vätska.

Anm. 1. Med rumstemperatur avses en temperatur, som ligger så nära + 20° C, att avvikelsen vid tekniska bestämningar är utan betydelse.

Anm. 2. Vid reduktion av volymen till 0° C och 760 mm kvicksilver antages även vattenånga följa lagarna för ideala gaser.

Anm. 3. Användes kalorimeter för bestämning av kalorimetriska värmevärdet av en gas, skall den använda apparattypen angivas.

Anm. 4. Vid uppgift om kalorimetriska värmevärdet hos en gas skall angivas, om uppgiften gäller torr eller

fuktig gas. Hänför den sig till fuktig gas, bör fuktighetshalten angivas.

§ 5.

Effektivt värmevärde (danska: nyttig Braendvaerdi (nedre Braendvaerdi), norska: effektiv braendvaerdi (nedre braendvaerdi)) hos ett ämne är den värmemängd i kalorier, som alstras, då enhetsmängden (för fasta och flytande ämnen: 1 kg, för gasformiga ämnen: 1 m^3 av 0° C och 760 mm kvicksilver) av ämnet fullständigt förbrinner och härvid det vid förbränningen bildade och det i ämnet eventuellt befintliga vattnet övergår i ångform. Det effektiva värmevärdet beräknas ur det kalorimetriska genom att från detta draga 600 kcal för varje kg av det vid förbränningen bildade och det i ämnet eventuellt befintliga vattnet.

Anm. 1. Gäller uppgift å det effektiva värmevärdet hos ett fast eller flytande ämne ett annat tillstånd än inlämningstillståndet, skall detta särskilt angivas.

Anm. 2. Vid uppgift om effektiva värmevärdet hos en gas skall angivas, om uppgiften gäller torr eller fuktig gas. Hänför den sig till fuktig gas, bör fuktighetshalten angivas.

§ 6.

De anvisningar rörande provtagning av stenkol, som lämnats av Statens Provningsanstalt i Stockholm (Se: Statens Provningsanstalts cirkulär N:r 5 med titel »Anvisningar för provtagning av stenkol») rekommenderas till iakttagande.

Diskussionsinlägg.

Notis om kvicksilverlikriktare.

Med anledning av lektor M. Lemoines artikel om likriktare i marshäftet av denna tidskrift är måhända följande meddelande av intresse.

Starkströmmen till härvarande läroverk (Visby) levereras från stadens elektricitetsverk, som är utrustat med ackumulatorbatteri och likströmsgeneratorer av vanlig typ. Under loppet av förra året vidtogs en ändring så, att staden numera köper större delen av sitt elektriska energibehov från ett kraftverk i Slite i form av växelström, som härstädes likriktas medelst en kvicksilverlikriktare. Ändringen har icke varit till uteslutande belåtenhet. Likriktaren lämnar nämligen icke blott likström utan även en överlagrad växelström av ej obetydlig amplitud. Huvudsakligen genom kapacitiv förmedling verkar denna växelström i större eller mindre grad störande på radiomottagare, vilket föranlett både tidningspolemik och protestmöte. (Angående dylika störningar och försök till deras avhjälpande hänvisas till ingenjör Mogensens artikel i tidskriften Radioamatören, år 1925.) Läroverket får numera i regel kvicksilverlikriktad ström i stället för ren teknisk likström. En direkt olägenhet av den nya strömformen är, att båglampan i projektionsapparaten utsänder en ton med svängningstalet 300 av sådan intensitet, att den verkar störande under samtidigt pågående lektion.

Nu avsåg lektor Lemoine det fall, då ett läroverk, som endast har tillgång till växelspänning, önskar erhålla likriktad ström. Härvidlag anser även jag, att en väl funktionerande kvicksilverlikriktare är både den modernaste och den angenämaste likriktaranordningen, man kan välja.

Dock vill jag framhålla ett par synpunkter. Likriktaren torde ställa sig något dyrare i anskaffning än en roterande omformare för samma effekt. Vidare måste den köpas från utlandet, medan goda roterande omformare av svensk tillverkning kunna erhållas. Slutligen *kan* man riskera, att likriktaren ej håller vakuum. (Enligt uppgift har Visby stads likriktare redan varit utsatt för missöden i den vägen.)

Ett tillfälligt fel på en roterande omformare kan i de flesta fall avhjälpas inom kort tid, men krånglar en likriktare, är det, särskilt ute i landsorten, ofta svårt att finna en sakkunnig reparatör. Vid köp av likriktare bör man därför av säljaren söka utverka så lång garanti som möjligt.[1]

Torgny Edqvist.

Några anmärkningar till frågan om läroboksplagiat.

Utan att vilja uttala ett värdeomdöme om H. Y. LARSONS Lärobok i plangeometri ber jag att få framföra ett par sakliga invändningar mot den recension över denna lärobok, som finns intagen i denna tidskrifts förra häfte.

Recensenten anser Larsons bok vara ett plagiat av R. MATTSONS Lärobok i plangeometri och belyser sitt påstående med fyra exempel. Han skriver: »Avskriften är icke absolut ordagrann. Där det hos Mattson står: Men $a^2 + b^2 = c^2$, skriver Larson: Men nu är $a^2 + b^2 = c^2$, för att ta ett rätt typiskt exempel.» Vid första ögonkastet kan man möjligen tycka, att detta exempel är dräpande, men om man besinnar, att både Larson (sid. 108) och Mattson (sid. 63) bevisa samma generalisering av den Pythagoreiska satsen, så finner man, att det bara är som det skall vara, när båda författarna i sina bevis använda samma sats.

Vidare skriver recensenten: »När det gäller en lärobok i geometri kan naturligtvis åtskilligt i fråga om bevis och tankegång sägas vara allmän egendom, men just i Mattsons bok, som här varit den huvudsakliga källan, torde en hel del i den vägen vara original, t. ex. bevisen vid rektangelformeln, harmoniska

[1] Red. ämnar i ett följande häfte återkomma till likriktarfrågan, vilken torde tarva ytterligare diskussion.

cirkeln, satserna i likställighetsläran m. m.» Vad bevisen för rektangelformeln beträffar, så förete Mattsons bevis ej större olikheter med samma bevis i G. LINDBORG, Lärobok i planimetri I (1910) än olikheterna mellan Larsons och Mattsons bevis. Dessa bevis böra alltså rätteligen räknas till »allmän egendom». Detsamma gäller om satserna och bevisen i likställighetsläran. Man jämföre O. JOSEPHSON, Plan geometri (2:a uppl. 1909). Däremot är Mattsons synnerligen eleganta bevis för den harmoniska cirkeln, såvitt jag vet, nytt. Men — Larson använder ett *helt annat bevis* för denna sats.

Exemplet på Larsons »avskrift» är alltså ett slag i luften, och de tre exemplen på Larsons kränkning av Mattsons »litterära äganderätt» äro alla oriktiga.

Karl Blix.

Svar till ovanstående anmärkningar.

Ovanstående synes mig byggt på en missuppfattning av vad jag i min recension velat säga, möjligen beroende på jag ej varit utförlig — eller tydlig — nog.

Jag har sagt, att Larsons bok är ett plagiat av Mattsons, delvis även Hagströms, bok på samma område, och jag är övertygad om, att var och en, som slår upp böckerna och jämför, måste komma till detta resultat. Se på figurer, beteckningar, bevis, övningsexempel. T. o. m. mindre lyckade detaljer i Mattsons lärobok, t. ex. en språklig inadvertens »proportionella mot var sin sida» hava kritiklöst kopierats av Larson. Även recensenter i Pedagogisk tidskrift oeh i Tidning för Sveriges läroverk ha kommit med samma omdöme. Den senare använder just ordet plagiat.

Jag har ingalunda kommit med några tre exempel på likheten — det skulle vara löjligt när det gäller en överensstämmelse på närmare 70 sidor. Jag har däremot nämnt några exempel på den Mattsonska bokens originalitet — f. ö. långtifrån de enda — som gör, att denna bok intar en bestämd rangplats bland böcker på detta områda. *Allt* detta har icke Larson anammat — måhända hade jag bort påpeka det — i så fall torde boken blivit bättre än den nu är. Vad nu rektangelformeln — det irrationella fallet — beträffar, påminner nog Mattsons bevis om Lindborgs (som jag ej sett förrän nu) men är på ett helt annat sätt konkret, genom att det tekniska utförandet blivit ett annat. Beteckningarna $b_1 + \frac{1}{n}$ och $h_1 + \frac{1}{n}$ har sålunda Lar-

son lånat från Mattson och ej från Lindborg, som icke har dem. Gången i likställighetsläran är, såvitt jag kan se, alls icke densamma hos Mattson och Josephson. Mattson synes mig ha byggt upp detta kapitel målmedvetnare fram till satsen »I likformiga figurer äro motsvarande linjer proportionella», vilken sats ej tycks finnas hos Josephson — men väl hos Larson.

Att jag omnämnt några av den Mattsonska bokens förtjänster, vare sig dessa överflyttats till Larsons bok eller ej, beror därpå, att det synes mig upprörande, om en så förtjänstfull bok skulle kunna på ett eller annat håll utträngas av ett plagiat, som ej bjuder något nytt av värde men möjligen kan verka tilltalande genom sin utstyrsel och sitt utförligare skrivsätt, vilka båda dock medfört ett högst betydligt ökat pris. Det var frågan om skrivsättet, stilen, som berördes i exemplet $a^2 + b^2$, som ju valdes för att visa icke en likhet utan en typisk olikhet, just där en absolut likhet icke varit förvånande.

Bengt E. Nyström.

Insända böcker.

J. Gabriel Jonsson, *Ekvationer och algebra I, exempelsamling för realskolor, mellanskolor och flickskolor*, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1927. 104 sid. Kart. kr. 2: 25.

Isaac Newton, *Naturvetenskapens matematiska principer, Första boken*, översatt och försedd med inledning, översiktlig sammanfattning av innehållet jämte analytiska notiser av C. V. L. Charlier, C. W. K. Gleerup, Lund, 1927. XXX + 291 sid. Häft. kr. 15: —.

Vivian T. Saunders, *The Polarimeter, a Lecture on the Theory and Practice of Polarimetri*, Adam Hilger, London. 30 sid. Inb. 1 s. 6 d.

F. Twyman, *Two Lectures on the Development and Present Position of Chemical Analysis by Emission Spectra*, samma förlag. 43 sid. Inb. 2 s. 6 d.

Magnus Lemoine, Meddelande om ny materiell, häft. 4. *Likströms-växelströmsomformare, likriktare samt experiment med växelström*, P. A. Norstedt & Söner, 1927. 38 sid. Häft. 1: —.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

256) En ellips roterar kring sin medelpunkt. Sök orten för skärningspunkten mellan tangenterna i de punkter på ellipsen, i vilka denna skäres av en fast rät linje.

Briot et Bouquet, Lecons de Geometrie analytique.

257) En rät cirkulär stympad kon, vars plana ändytor ha radierna R och r, skäres av ett plan, som genomskär mantelytan utefter en ellips, vars toppar ligga i var sin av de båda plana ändytorna. Bestäm förhållandet mellan volymerna av de båda delar, i vilka den stympade konen delas av planet.

Matematisk Tidskrift, 1923, uppg. 141.

258) En godtycklig punkt P på ett kägelsnitt förenas med de båda brännpunkterna F och F_1. Sök orten för triangeln PFF_1:s in- och vidskrivna cirklars medelpunkter.

Iter.

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

259) I en likbent triangel är tangenten för vinkeln vid spetsen 3 gånger så stor som sinus för vinkeln vid basen. Hur stor är basvinkeln? Svar: 55°,96.

260) Två cirklar, båda med 9 cm:s radie, tangera varandra utantill. Dessa cirklar tangera innantill en cirkel med 50 cm:s radie. Beräkna radien i den cirkel, som tangerar alla tre. Svar: $2\frac{12}{19}$ cm och $40\frac{10}{11}$ cm.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar godhetsfullt kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

261) Diskutera kurvan $y = \frac{x^3 + 7x - 3}{2x^2}$.

262) A är spetsen i en regelbunden tetraeder $ABCD$. Höjden från A träffar omskrivna sfären i E. Visa, att sidovinklarna i hörnet $E(BCD)$ äro räta.

263) F är fokus till parabeln $y^2 = 2px$; A och B två fixa punkter på axeln, så belägna, att $FA = FB = a$. Visa, att skillnaden mellan kvadraterna på dessa punkters avstånd till en rörlig tangent är konstant $= 2pa$.

264) Att upprita en triangel, då man känner basen, höjden mot basen samt förhållandet mellan de övriga sidornas medianer.

Lösningar till uppg. 222, 229, 230.

222) *Man betraktar alla trianglar på samma bas BC, vilkas tredje vinkelspets A är så belägen, att höjden från A, medianen från B och bissektrisen från C skära varandra i en och samma punkt. Sök orten för denna punkt.* *Iter.*

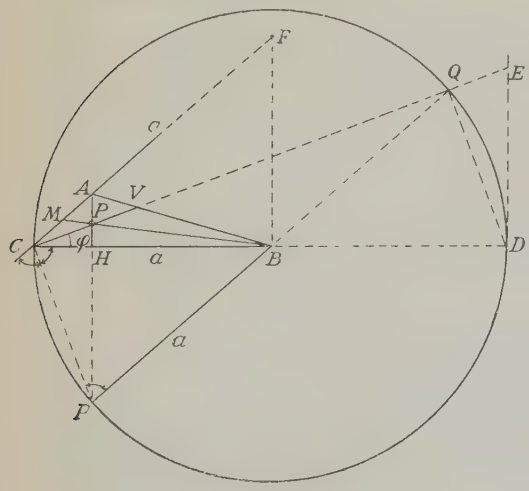


Fig. 1.

Låt AH, BM och CV vara de ifrågavarande linjerna, som råkas i P. Konstruera punkten P' harmoniskt med P i förhållande till punktparet A, H. Då är CP' yttre bissektris till vinkeln C i triangeln ABC, och BP', som är konjugerad med medianen BM i förhållande till strålparet BA, BC, måste vara parallell med

AC. Härav följer, att *orten för* P', då triangeln ABC varierar, är *cirkeln* $(B;\ a)$; därigenom erhålles en enkel konstruktion av ifrågavarande trianglar. Om vidare C, D; P', Q äro par diametralt motsatta punkter samt cirkeltangenten i D skär CQ:s förlängning i E, inses genast, att $\triangle CPP' \simeq QED$, varav $CP = QE$. *Orten för* P är alltså enligt den klassiska definitionen en s. k. *Diokles' kissoid*[1] med ekvationen

$$r = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi},$$

ifall $CP = r$, $\angle PCB = \varphi$. Endast den inom cirkeln liggande delen tages i anspråk, så länge CP är en inre bissektris.

*

Tillägg: Av intresse är ock att söka orterna för A, M och V (se fig. 1)[2]. Om CA skär den mot BC vinkelräta diametern i F, är tydligen $AF = BP' = a$. *Orten för* A är således (ena grenen av) en annan välkänd kurva, nämligen en *Nikomedes konchoid* av den speciella typ, som har spets (i C). *Orten för* M är då en likadan konchoid, endast förminskad i skalan 1 : 2.

För att slutligen erhålla *orten för* V, observera vi, att P och Q ligga harmoniskt i förhållande till C och V. Sättes alltså nu $CV = r$ och $\angle VCB = \varphi$, fås med stöd av kissoidens ekvation och det bekanta samband, som gäller vid harmonisk delning

$$\frac{2}{r} = \frac{\cos \varphi}{2a \sin^2 \varphi} + \frac{1}{2a \cos \varphi}$$

eller

$$r = 4a \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

eller i rätvinkliga koordinater

$$(x^2 + y^2)^2 = 4axy^2.$$

[1] Se t. ex. Lindelöf, Lärobok i analytisk geometri, 3 uppl., Sthlm 1877, p. 151.

[2] Enligt muntligt meddelande av problemförfattaren.

Orten kallas av somliga författare »*symmetriskt tvåblad*». Endast den inom cirkeln liggande delen hör till trianglar, i vilka CV är inre bissektris.

Orterna för A, P, V återfinnas i fig. 2. Där hänföra sig de fullt utdragna delarna till de fall, då CV är inre bissektris; är CV yttre bissektris, ligga resp. punkter på de streckade delarna. *X.*

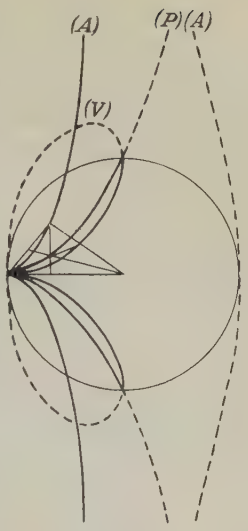


Fig. 2.

229) *Att upprita en triangel, då man känner en vinkel, summan av de båda omfattande sidorna och den inskrivna cirkelns radie.* *Iter.*

Upprita den givna vinkeln C; inpassa mellan vinkelbenen en cirkel med den givna radien r; en tangeringspunkt blir D; kalla DC för n. Den sökta triangelns bas blir $l - 2n$, om l är den givna summan. Uppgiften är således reducerad till standarduppgiften att upprita en triangel, då man känner basen, toppvinkeln och de omfattande sidornas summa. *C. A. L.*

230) *Att konstruera brännpunkterna till ett kägelsnitt, då man känner de linjer, som innehålla axlarna och två normaler.* *X.*

Lösning I.

På grund av medelpunktskägelsnittens dubbla symmetri kan man utan inskränkning av generaliteten antaga, att de mellan axlarna liggande delarna av normalerna falla inom *samma* axelvinkel. Varje normal bestämmer nämligen läget av tre andra, bildande sidor i en parallellogram med axlarna till diagonaler. Om de givna normalerna icke uppfylla det angivna villkoret, kan man tydligen ersätta den ena (eller båda) med en sådan sida i motsvarande normalparallellogram, att villkoret blir uppfyllt. Vi skola för enkelhetens skull uttrycka detta så, att *normalerna äro förlagda till samma axelvinkel.*

Normalernas förläggning till samma axelvinkel har den fördelen, att man kan omedelbart bestämma såväl kägelsnittets art som fokalaxelns läge. Fokalaxeln kan nämligen icke väljas godtyckligt utan är entydigt bestämd av de givna normalernas lägen relativt axlarna. För att påvisa detta betrakta vi ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,$$

där $a>b$. Ekvationen för normalen i (x_1, y_1) är

$$y-y=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1),$$

dess intercepter på axlarna $a_1=\frac{c^2}{a^2}\cdot x_1$, $b_1=-\frac{c^2}{b^2}\cdot y_1$, längden av det mellan axlarna liggande *normalsegmentet* således

$$l_1=c^2\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}=\frac{c^2}{ab}\sqrt{a^2-e^2x_1^2}.$$

När (x_1, y_1) genomlöper ellipskvadranten från $x_1=a$ till $x_1=0$, minskar ständigt normalens intercept på x-axeln $\left(\text{från } \frac{c^2}{a} \text{ till } 0\right)$, samtidigt med att det mellan axlarna avskurna normalsegmentet ständigt växer $\left(\text{från } \frac{c^2}{a} \text{ till } \frac{c^2}{b}\right)$. Man finner härav, att två till samma axelvinkel hörande normaler alltid skära varandra *inom* denna axelvinkel, och att *den normal, vars mellan axlarna liggande segment är störst, skär fokalaxeln närmare medelpunkten.*

Betrakta vi åter hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

finna vi på samma sätt, att normalen i (x_1, y_1) skär axlarna på avstånden $\frac{c^2}{a^2}\cdot x_1$ och $\frac{c^2}{b^2}\cdot y_1$ från medelpunkten. När x_1 växer från a till ∞, växer ständigt normalens intercept på x-axeln $\left(\text{från } \frac{c^2}{a} \text{ till } \infty\right)$. Samtidigt växer ständigt den

trigonometriska tangenten för den spetsiga vinkeln mellan normalen och x-axeln $\left(\text{från } 0 \text{ till } \frac{a}{b}\right)$. Två till samma axelvinkel hörande normaler *konvergera således inom denna axelvinkel mot fokalaxeln och skära varandra i en punkt utanför nämnda axelvinkel.*

Kägelsnittet är således en ellips eller en hyperbel, allteftersom de båda till samma axelvinkel förlagda normalerna skära varandra inom eller utanför denna axelvinkel. Fokalaxeln är i båda fallen fullständigt bestämd av normalernas lägen relativt axlarna.

Tages axeln genom foci till x-axel och den däremot vinkelräta axeln till y-axeln, så är kägelsnittets ekvation av formen

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \cdot \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

där $\varepsilon = \pm 1$. Antagas normalernas axelintercepter vara a_1, b_1 och a_2, b_2, deras mellan axlarna avskurna längder l_1 och $l_2 > l_1$, så är enligt det föregående

$$x_1 = \frac{a_1 a^2}{c^2}, \quad y_1 = -\varepsilon \cdot \frac{b_1 b^2}{c^2},$$

$$x_2 = \frac{a_2 a^2}{c^2}, \quad y_2 = -\varepsilon \cdot \frac{b_1 b^2}{c^2}.$$

Insättas dessa uttryck för x_1, y_1 och x_2, y_2 i (1), erhålles

$$\frac{a_1^2 a^2}{c^4} + \varepsilon \cdot \frac{b_1^2 b^2}{c^4} = \frac{a_2^2 a^2}{c^4} + \varepsilon \cdot \frac{b_2^2 b^2}{c^4} = 1,$$

varav

$$\frac{b^2}{a^2} = \varepsilon \cdot \frac{a_1^2 - a_2^2}{b_2^2 - b_1^2}.$$

Man får därefter

$$a^2 = \frac{(b_2^2 - b_1^2)(a_1^2 b_2^2 - a_2^2 b_1^2)}{(l_2^2 - l_1^2)^2},$$

$$b^2 = \varepsilon \cdot \frac{(a_1^2 - a_2^2)(a_1^2 b_2^2 - a_2^2 b_1^2)}{(l_2^2 - l_1^2)^2},$$

$$c^2 = a^2 - \varepsilon \cdot l^2 = \frac{a_1^2 b_2^2 - a_2^2 b_1^2}{l_2^2 - l_1^2}.$$

Då vi antagit $l_2 > l_1$, kunna vi sätta

$$l_2^2 - l_1^2 = d^2.$$

Då är

$$c^2 = \left(\frac{a_1 b_2}{d}\right)^2 - \left(\frac{a_2 b_1}{d}\right)^2,$$

varav följande *konstruktion:*

De till samma axelvinkel förlagda normalerna antagas skära axlarna i A_1, B_1, resp. A_2, B_2. Över A_2B_2 såsom diameter uppritas en cirkel. Från diameterns ena ändpunkt, låt vara A_2, inpassas en korda $A_2C = A_1B_1$. På fokalaxeln avsättes från axlarnas skärningspunkt stycket $OD = B_2C$. Punkten D förenas med B_1 och B_2. Från A_1 och A_2 dragas linjerna $A_1L \parallel DB_2$, $A_2M \parallel DB_1$, vilka skära den andra axeln i L och M. Cirkeln med M till medelpunkt och OL till radie utskär på fokalaxeln de sökta brännpunkterna F, F'.

Om någon av normalerna sammanfaller med en axel eller om normalerna sammanfalla med varandra eller ligga symmetriskt med avseende å någon av axlarna eller dessas skärningspunkt (kägelsnittets medelpunkt), är uppgiften obestämd. Äro de av axlarna på normalerna avskurna längderna lika stora, utan att normalerna utgöra sidor i en normalparallellogram, finnes intet kägelsnitt, som uppfyller villkoren. Gå båda normalerna genom axlarnas skärningspunkt, utgöres kägelsnittet av en kring denna punkt beskriven cirkel med godtycklig radie.

Kägelsnittet sönderfaller till ett linjepar genom axlarnas skärningspunkt,

1) om normalerna äro sinsemellan parallella,

2) om en av normalerna går genom axlarnas skärningspunkt, under det att den andra skär axlarna i skilda punkter (hyperbelgränsfall),

3) om normalerna äro parallella med var sin axel (kägelsnittet utgöres i detta fall av de båda axlarna).

Äro normalerna parallella med en och samma axel (utan att ligga symmetriskt), sönderfaller kägelsnittet i två med den andra axeln parallella räta linjer på godtyckligt avstånd från medelpunkten.

Om en av normalerna är parallell med en axel, under det att den andra skär axlarna, sönderfaller kägelsnittet i en eller två på den andra axeln belägna dubbelsträckor (ellips- eller hyperbelgränsfall).

Vi betrakta slutligen det fallet, att en av axlarna ligger oändligt långt bort. Kägelsnittet är då en parabel. Dess ekvation, hänförd till *axeln* såsom x-axel och ordinatan genom den obekanta brännpunkten såsom y-axel, vare

$$y^2 = 4a(x+a).$$

Normalerna antagas skära axeln i A_1 och A_2 på avstånden a_1 och $a_2 > a_1$ från brännpunkten. Deras vinkelkoefficienter vare k_1 och k_2 ($|k_2| > |k_1|$). Fotpunkterna betecknas, såsom förut, med (x_1, y_1) och (x_2, y_2).

Då subnormalen är konstant ($=2a$), ha vi

$$x_1 = a_1 - 2a, \quad y_1 = -2k_1a,$$

$$x_2 = a_2 - 2a, \quad y_2 = -2k_2a.$$

Insättas uttrycken för x_1, y_2 och x_2, y_2 i parabelns ekvation, erhålles efter förkortning och omflyttning av termerna

$$a_1 = (k_1^2+1)a, \quad a_2 = (k_2^2+1)a,$$

således

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{k_2^2+1}{k_1^2+1},$$

varav följande *konstruktion:*

Man uppdrager mittpunktsnormalen till A_1A_2, vilken skär normalen genom A_1 i B_1 och normalen genom A_2 i B_2. Då är tydligen

$$\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{\sqrt{k_2^2+1}}{\sqrt{k_1^2+1}}.$$

På A_2B_2 såsom diameter uppritas en halvcirkel, i vilken inpassas kordan $B_2C = A_1B_1$. Från C drages $CD \perp A_2B_2$. Då är

$$\frac{\overline{B_2A_2}^2}{\overline{B_1A_1}^2} = \frac{\overline{B_2A_2}^2}{\overline{B_2C}^2} = \frac{B_2A_2}{B_2D} = \frac{k_2^2+1}{k_1^2+1}.$$

Punkten D (på A_2B_2) förenas med A_1, och från B_2 drages $B_2F \parallel DA_1$, varigenom punkten F på axeln bestämmes. Punkten F är den sökta brännpunkten.

Konstruktionen förutsätter, att normalerna skära axeln i skilda punkter under sneda vinklar av olika storlek. Äro dessa villkor icke uppfyllda, är kägelsnittet obestämt eller degenererat. *Iter.*

Lösning II.

Drag linjen L genom mittpunkterna till A_1A_2 och B_1B_2. Inpassa sträckan P_1P_2 mellan de givna normalerna, så att P_1P_2 halveras av L och är vinkelrät mot denna linje. P_1 och P_2 äro då normalernas fotpunkter på kägelsnittet, varefter konstruktionen fullföljes t. ex. som i uppgift 142 (årg. 7, sid. 125). *X.*

Konstruktionens riktighet inses, om vi söka vinkelkoefficienten k för L.

$$k = \frac{\frac{c^2}{b^2}(y_1+y_2)}{\frac{c^2}{a^2}(x_1+x_2)} = \pm\frac{a^2(y_1+y_2)}{b^2(x_1+x_2)} = \mp\frac{x_1-x_2}{y_1-y_2} = \frac{a^2y_0}{b^2x_0},$$

om (x_0, y_0) äro koordinaterna för kordans mittpunkt.

Att L går genom (x_0, y_0) synes genast, om vi uppställa dess ekvation:

$$L \equiv y = \frac{a^2y_0}{b^2x_0}\left(x - \frac{c^2x_0}{a^2}\right). \qquad \textit{Red.}$$

Även löst av *C. A. L.*

Atomviktstabell 1927.

Ag	Silver	107,88	Mn	Mangan	54,93
Al	Aluminium	26,97	Mo	Molybden	96,0
Ar	Argon	39,88	N	Kväve	14,008
As	Arsenik	74,96	Na	Natrium	23,00
Au	Guld	197,2	Nb	Niobium	93,5
B	Bor	10,82	Nd	Neodym	144,3
Ba	Barium	137,4	Ne	Neon	20,2
Be	Beryllium	9,02	Ni	Nickel	58,68
Bi	Vismut	209,0	**O**	**Syre**	**16,000**
Br	Brom	79,92	Os	Osmium	190,9
C	Kol	12,00	P	Fosfor	31,04
Ca	Kalcium	40,07	Pb	Bly	207,2
Cd	Kadmium	112,4	Pd	Palladium	106,7
Ce	Cerium	140,2	Pr	Praseodym	140,9
Cl	Klor	35,46	Pt	Platina	195,2
Co	Kobolt	58,97	Ra	Radium	226,0
Cp	Cassiopeium	175,0	Rb	Rubidium	85,5
Cr	Krom	52,01	Rh	Rodium	102,9
Cs	Cäsium	132,8	Ru	Rutenium	101,7
Cu	Koppar	63,57	S	Svavel	32,07
Dy	Dysprosium	162,5	Sb	Antimon	121,8
Em	Emanation	222	Sc	Skandium	45,10
Er	Erbium	167,7	Se	Selen	79,2
Eu	Europium	152,0	Si	Kisel	28,06
F	Fluor	19,00	Sm	Samarium	150,4
Fe	Järn	55,84	Sn	Tenn	118,7
Ga	Gallium	69,72	Sr	Strontium	87,6
Gd	Gadolinium	157,3	Ta	Tantal	181,5
Ge	Germanium	72,60	Tb	Terbium	159,2
H	Väte	1,008	Te	Tellur	127,5
He	Helium	4,00	Th	Torium	232,1
Hf	Hafnium	178,6	Ti	Titan	48,1
Hg	Kvicksilver	200,6	Tl	Tallium	204,4
Ho	Holmium	163,5	Tu	Tulium	169,4
In	Indium	114,8	U	Uran	238,2
Ir	Iridium	193,1	V	Vanadium	51,0
J	Jod	126,92	W	Volfram	184,0
K	Kalium	39,10	X	Xenon	130,2
Kr	Krypton	82,9	Y	Yttrium	89,0
La	Lantan	138,9	Yb	Ytterbium	173,5
Li	Litium	6,94	Zn	Zink	65,37
Mg	Magnesium	24,32	Zr	Zirkonium	91,2